Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que chaque année, 14 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés.
En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année 2017+n.
Ainsi on a $u_0=120$.

1.a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}14\,u_n-7$.
1.b. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2018.

2. Compte tenu de ses capacités structurelles actuelles, l'entreprise ne peut prendre en charge que 190 contrats.
Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.
On cherche donc à savoir en quelle année l'entreprise devra embaucher.
Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```
n ← 0
u ← 120
Tant que . . . . .
   n ← n+1
   . . . . . .. .
Fin Tant que
Afficher 2017+n
```

2.a. Recopier est compléter l'algorithme ci-dessus.
2.b. Quelle est l'année en sortie d'algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n=u_n-50$ pour tout entier naturel n.
3.a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
3.b. Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n,
$u_n=70\times 1{,}14^n+50$.
3.c. Résoudre par le calcul l'inéquation $u_n>19$.
Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

CORRECTION

1.a. u_n est le nombre de contrats souscrits l'année 2017+n

u_{n+1} est le nombre de contrats souscrits l'année 2017+n+1

L'année 2017+n+1 il y a 14 % de contrats supplémentaires souscrits et 7 contrats résiliés, donc

$u_{n+1}=u_n+\frac{14}{100}u_n-7=1{,}14\,u_n-7$

1.b. $2018=2017+1$

$u_1=1{,}14\,u_0-7=1{,}14\times 120-7=129{,}8$ (on arrondit à l'unité).

Le nombre de contrats souscrits en 2018est : 130.

2.a. Il faut écrire en ligne 3 : $u\leqslant 190$ et en ligne 5 : $u=1{,}14\times u-7$.

```
n ← 0
u ← 120
Tant que  u  ≤ 190
   n ← n+1
   u=1.14xu-7
Fin Tant que
Afficher 2017+n
```

2.b. On utilise la calculatrice pour calculer la valeur de u obtenue pour chaque boucle jusqu'à l'obtention d'une valeur strictement supérieure à 190.

On donne les résultats sous forme de tableau.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	120	130	141	154	168	185	204

On obtient pour n la valeur 6.

L'entreprise devra embaucher à partir de 2017+6=2023.

Remarque

On donne un programme (non demandé) en Python de l'algorithme.

(Dans ce programme on demande d'afficher les résultats intermédiaires pour retrouver les résultats du tableau précédent).

Programme

```
print('Début de programme')
n=0
u=120
while u<=190:
    n=n+1
    u=1.14*u-7
    r=round(u)
    print("n="+str(n),"u="+str(r))
print("2017+"+str(n))
print("Fin de Programme")
```

Exécution

```
Début de programme
n=1 u=130
n=2 u=141
n=3 u=154
n=4 u=168
n=5 u=185
n=6 u=204
2017+6
Fin de Programme
```

3. Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-50$ donc $u_n=v_n+50$

3.a. $v_{n+1}=u_{n+1}-50=1,14\,u_n-7-50=1,14(v_n+50)-57=1,14\,v_n+57-57=1,14\,v_n$

(v_n) **est la suite géoétrique de raison 1,14 et de premier terme** $v_0=u_0-50$ **=120-50=70.**

3.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=70\times 1,14^n$ donc $u_n=v_n+50=70\times 1,14^n+50$

3.c. $u_n>190 \Leftrightarrow 70\times 1,14^n+50>190 \Leftrightarrow 70\times 1,14^n>140 \Leftrightarrow 1,14^n>\dfrac{140}{70}=2$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(1,14^n)>\ln(2) \Leftrightarrow n\times\ln(1,14)>\ln(2)$

1,14 >1 donc $\ln(1,14)>0$

$\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln(2)}{\ln(1,14)}$

$\dfrac{\ln(2)}{\ln(1,14)}=5,29$ à 10^{-2} près et n est un entier naturel

$\Leftrightarrow$ **n > 6**

6 est la plus petite valeur de n telle que $u_n>190$