Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.
Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy.
- 25 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy.Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les événements suivants :

- A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » :
- B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année 2017+n ;
- b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année 2017+n.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année 2017+n.
L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien des photocopieurs.

Partie A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est l'état stable.
3. À votre avis l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.
On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}54 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 0{,}25\,b_n$ puis que $a_{n+1} = 0{,}60\,a_n + 0{,}25$.

2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

```
n ← 0
a ← 0.46
Tant que . . . . .
   n ← n+1
   . . . . . . .
Fin Tant que
Afficher 2017+n
```

2.a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.

2.b. Quelle est l'année en sortie de l'algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0{,}625$ pour tout entier naturel n.

3.a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

3.b. Exprimer u_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier n :
$a_n = -0{,}165 \times 0{,}60^n + 0{,}625$.

3.c. Résoudre l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}62$.
Quel résultat de la question **2.** retrouve-t-on ?

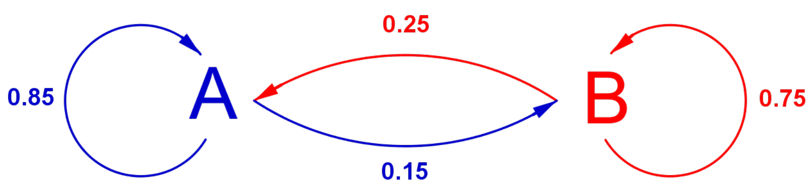
CORRECTION

1. On note :
A l'état : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy ».
B l'état : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy » ;
A et B sont les deux sommets du graphe probabiliste.

. Chaque année :
15 % des clients qui avaient souscrit un contrat chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres (85%) restent fidèles à Alphacopy.
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête AA est : 0,85
Le poids de l'arête AB est : 0,15

. Chaque année :
25 % des clients qui avaient souscrit un contrat chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres (75%) restent fidèles à Bêtacopy.
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête BA est : 0,25
Le poids de l'arête BB est : 0,75

. On obtient le graphe probabiliste :



. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.
Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.
La matrice de transition du graphe probabiliste est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,85
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,15
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,25
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,75

$M=\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

2. $P=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est l'état stable $\Leftrightarrow \begin{cases} PM=P \\ x+y=1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}625\times 0{,}85+0{,}375\times 0{,}25 & 0{,}625\times 0{,}15+0{,}375\times 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0{,}53125+0{,}09375 & 0{,}09375+0{,}28125 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$$

et $0{,}625+0{,}375=1$
<u>Conséquence</u>
$P=\begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est l'état stable.

3. À long terme, l'entreprise Alphacopy peut obtenir une valeur voisine de 62,5 % des contrats d'entretien des photocopieurs donc réaliser l'objectif.

Partie B

1. $P_0 = (0{,}46 \quad 0{,}54)$

Pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n M$

$$(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = (0{,}85\,a_n + 0{,}25\,b_n \quad 0{,}15\,a_n + 0{,}75\,b_n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 0{,}25\,b_n \\ b_{n+1} = 0{,}15\,a_n + 0{,}75\,b_n \end{cases}$$

On a, pour tout entier naturel n :

$a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 0{,}25\,b_n$ et $a_n + b_n = 1$ soit $b_n = 1 - a_n$

$a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 0{,}25 \times (1 - a_n) = 0{,}85\,a_n + 0{,}25 - 0{,}25\,a_n = 0{,}60\,a_n + 0{,}25$

2.a. On complète l'algorithme donné.

Ligne 3 : **a < 0,62**

Ligne 5 : **a = 0,6xa+0,25**

```
n ← 0
u ← 120
Tant que  a <  0.62
   n ← n+1
   a=0.6*a+0.25
Fin Tant que
Afficher 2017+n
```

2.b. En utilisant la calculatrice, pour chaque boucle pour arriver à obtenir un résultat supérieur on égal à 0,62.

On donne les les résultat sur forme de tableau en arrondissant à 10^{-3}.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0.46	0.526	0.566	0.589	0.604	0.612	0.617	0.620

La société Alphacopy atteindra son objectif pour la première fois en 2017+7 = 2024.

<u>Remarque</u>

On donne un programme (non demandé) en Python de l'algorithme.

(Dans ce programme on demande d'afficher les résultats intermédiaires pour retrouver les résultats du tableau précédent).

<u>Programme</u>

```
print('Début de programme')
n=0
a=0.46
while a<0.62:
    n=n+1
    a=0.6*a+0.25
    print("n="+str(n),"a="+str(a))
print("2017+"+str(n))
print('Fin de programme')
```

<u>Exécution</u>

```
Début de programme
n=1 a=0.526
n=2 a=0.5656
n=3 a=0.58936
n=4 a=0.6036159999999999
n=5 a=0.6121695999999999
n=6 a=0.6173017599999999
n=7 a=0.6203810559999999
2017+7
Fin de programme
```

3. Pour tout entier naturel n, $u_n=a_n-0,625$ soit $a_n=u_n+0,625$.

3.a. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=a_{n+1}-0,625=0,6a_n+0,25-0,625=0,6(u_n+0,625)-0,375=0,6u_n+0,375-0,375=0,6u_n$

$u_0=a_0-0,625=0,46-0,625=-0,165$

(u_n) **est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme u_0 = -0,165.**

3.b. Pour tout entier naturel n :

$u_n=u_0\times q^n=-0,165\times 0,6^n$

$a_n=u_n+0,625=-0,165\times 0,6^n+0,625$

3.c. $a_n\geqslant 0,62 \quad\Leftrightarrow\quad -0,165\times 0,6^n+0,625\geqslant 0,62 \quad\Leftrightarrow\quad 0,625-0,62\geqslant 0,165\times 0,6^n$

$\Leftrightarrow\quad 0,005\geqslant 0,165\times 0,6^n \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{0,005}{0,165}\geqslant 0,6^n \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{5}{165}\geqslant 0,6^n \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{33}\geqslant 0,6^n$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow\quad \ln\left(\dfrac{1}{33}\right)\geqslant \ln(0,6^n) \quad\Leftrightarrow\quad -\ln(33)\geqslant n\times\ln(0,6)$

$0<0,6<1$ donc $\ln(0,6)<0$

$\Leftrightarrow\quad \dfrac{-\ln(33)}{\ln(0,6)}\leqslant n$

$\dfrac{-\ln(33)}{\ln(0,6)}=6,84$ à 10^{-2} près et n est un entier naturel donc

$\Leftrightarrow\quad n\leqslant 7$

On retrouve que :

L'entreprise Alphacopy atteindra son objectif pour la première fois en 2017+7 = 2024