

Exercice 4

6 points

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».

On définit aussi la fonction « *envie* » comme dérivée de la fonction « *satisfaction* ».

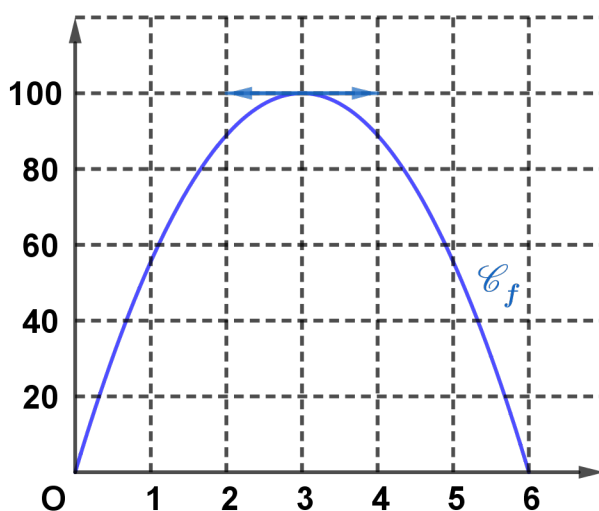
On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie de 0 à 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction du temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée du travail quotidien menant à « *saturation* ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0;30]$ par :

$$g(x) = 12,5x e^{-0,125x+1} \quad (x \text{ est exprimé en jour}).$$

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;30]$:

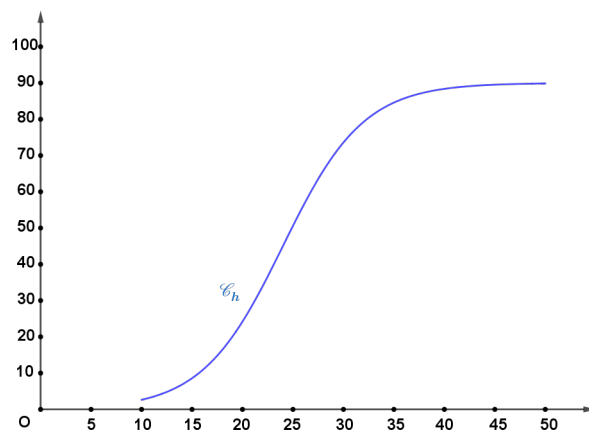
$$g'(x) = (12,5 - 1,625x) e^{-0,125x+1}.$$
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0;30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* » ?

Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h , est définie sur l'intervalle

$$[0;50] \text{ par : } h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}} \quad (x \text{ exprimé en millier d'euros}).$$

La courbe $\mathcal{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$\text{Dériver}(90/(1 + \exp(-0.25 * x + 6)))$ $\frac{22.5e^{-0.25x+6}}{(1 + e^{-0.25x+6})^2}$
2	$\text{Dériver}(22.5 * \exp(-0.25x + 6)/(1 + \exp(-0.25x + 6))^2)$ $\frac{5.625e^{-0.25x+6}(e^{-0.25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0.25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10; 50]$ l'inéquation $e^{-0.25x+6} - 1 > 0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10; 50]$.
4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.
5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « satisfaction » atteint 80.
Arrondir au millier d'euros.

CORRECTION

Partie A

Par lecture graphique, on peut affirmer que : la fonction « satisfaction » f est croissante sur $[0;3]$ et décroissante sur $[3;6]$ et maximale pour $x=3$ et $f(3)=100$?

1. La durée de travail quotidien menant à « saturation » est 3 heures.

2. Des variations de la fonction f on déduit le signe de la fonction dérivée f' (fonction « envie »). f' est positive sur $[0;3[$ et négative sur $]3;6]$.

Il y a donc « rejet » à partir de 3 heures de travail.

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;30]$: $g(x)=12,5 x e^{-0,125 x+1}$.

1. g est dérivable sur $[0;30]$.

$$(e^u)' = u' e^u \quad (e^{-0,125 x+1})' = -0,125 e^{-0,125 x+1}$$

Puis on dérive un produit.

$$g'(x) = 12,5 e^{-0,125 x+1} + 12,5 x (-0,125) = (12,5 - 12,5 \times 0,125 x) e^{-0,125 x+1} = (12,5 - 1,5625 x) e^{-0,125 x+1}$$

2. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;30]$, $e^{-0,125 x+1} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de : $(12,5 - 1,5625 x)$.

$$12,5 - 1,5625 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12,5}{1,5625} = 8$$

$$12,5 - 1,5625 x > 0 \Leftrightarrow \frac{12,5}{1,5625} = 8 > x$$

On donne le signe de $g'(x)$ sous la forme d'un tableau :

x	0	8	30
$g'(x)$	+	0	—

$$g(0)=0 \quad g(8)=12,5 \times 8 \times e^0 = 100 \quad g(30)=23,97 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Tableau de variations de g

x	0	8	30
$g'(x)$	+	0	—
$g(x)$	0	100	$g(30)$

Partie C

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10;50]$ $h(x) = \frac{90}{1+e^{-0,25 x+6}}$

1. En utilisant les résultats donnés par le logiciel de calcul formel on obtient :

$$h''(x) = \frac{5,625 e^{-0,25 x+6} (e^{-0,25 x+6} - 1)}{(1+e^{-0,25 x+6})^3}$$

2. On effectue d'abord la résolution de l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{-0,25x+6} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-0,25x+6} > 1$$

$\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow -0,25x+6 > \ln(1)=0 \Leftrightarrow 6 > 0,25x \Leftrightarrow \frac{6}{0,25} > x \Leftrightarrow 24 > x$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans l'intervalle $[10; 50]$ est l'intervalle **$[10, 24[$** .

Remarque

$$e^{-0,25x+6} - 1 < 0 \Leftrightarrow 24 < x \leq 50$$

$$e^{-0,25x+6} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 24$$

3. Sur l'intervalle $[10; 24[$ $h''(x) > 0$ donc h' (la fonction « envie ») est croissante sur $[10; 24[$ et **h est convexe sur $[10; 24[$** .

Sur l'intervalle $]24; 50]$ $h''(x) < 0$ donc h' (la fonction « envie ») est décroissante sur $]24; 50]$ et **h est concave sur $]24; 50]$** .

4. **À partir du salaire annuel de 24 000€ la fonction « envie » décroît.**

La justification est donnée dans la réponse précédente.

$$\begin{aligned} 5. \quad h(x) &= 80 \Leftrightarrow \frac{90}{1+e^{-0,25x+6}} = 80 \Leftrightarrow \frac{90}{80} = 1+e^{-0,25x+6} \Leftrightarrow \frac{9}{8} - 1 = e^{-0,25x+6} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = e^{-0,25x+6} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{8}\right) = -0,25x+6 \Leftrightarrow -\ln(8) = -0,25x+6 \Leftrightarrow 0,25x = 6+\ln(8) \Leftrightarrow x = \frac{6+\ln(8)}{0,25} \\ &\Leftrightarrow x = 24+4\ln(8) = 32,318 \text{ à } 10^{-3} \text{ près} \end{aligned}$$

Pour le salaire annuel de 32 318€ la fonction « satisfaction » atteint 80.