Exercice 1 — *5 points*

La fonction f est définie sur [0;12] par : $f(x)=2xe^{-x}$.

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver(2*x*exp(-x))
	-2*x*exp(-x)+2*exp(-x)
2	Factoriser(-2*x*exp(-x)+2*exp(-x))
	2*(1-x)*exp(-x)
3	Dériver(2*(1-x)*exp(-x))
	2*x*exp(-x)-4*exp(-x)
4	Factoriser(2*x*exp(-x)-4*exp(-x))
	2*(x-2)*exp(-x)

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2.a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [0;12] en le justifiant.
2.b. Démontrer que l'équation $f(x)=0{,}5$ admet deux solutions dans [0;12].
Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [0;12].

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool est modélisé par la fonction f.
. x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
. f(x) représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne

1.a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.
1.b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ?
Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

2. Le code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;12]

$f(x)=2xe^{-x}$

$(2x)'=2 \qquad (e^{-x})'=-e^{-x}$

$f'(x)=2e^{-x}+2x(-e^{-x})=2e^{-x}-2xe^{-x}=-2xe^{-x}+2e^{-x}$

La ligne 1 donne une écriture de la fonction dérivée de f.

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;12].

$f'(x)=2(1-x)e^{-x}$.

Or $e^{-x}>0$ donc le signe de f'(x) est le signe de 1-x.

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

$f'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 0\leqslant x<1$

$f'(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad 1<x\leqslant 12$

$f(0)=0 \qquad f(1)=\frac{2}{e}=0{,}74$ à 10^{-2} près $\qquad f(12)=1{,}5\times 10^{-4}$ à 10^{-5} près.

Tableau de variations

x	0		1		12
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$24e^{-12}$

2.b. f est continue et strictement croissante sur [0;1], 0,5 appartient à l'intervalle [f(0);f(1)] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0{,}5$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle [0;1].

En utilisant la calculatrice on obtient $\alpha =$ **0,36** à 10^{-2} près.

. f est continue et strictement décroissante sur [1;12], 0,5 appartient à l'intervalle [f(12);f(1)] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0{,}5$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle [1;12].

En utilisant la calculatrice on obtient $\beta =$ **2,15** à 10^{-2} près.

3. Le logiciel de calcul formel nous donne :

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;12], $f''(x)=2(x-2)e^{-x}$.

$e^{-x}>0$ doncle signe de $f''(x)$ est le signe de $x-2$.

$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

$f''(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2<x\leqslant 12$

$f''(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad 0\leqslant x<2$

On précise la convexité de la fonction f sous la forme d'un tableau.

x	0		2		12
f''(x)		−	0	+	
f(x)		f est concave		f est convexe	

Partie B

1.a. Le taux d'alcoolémie augmente la première heure suivant la consommation de la quantité d'alcool puis le taux diminue de la deuxième heure à la douzième heure.

1.b. Le taux d'alcoolémie est maximal une heure après la consommation de l'alcool.

Ce maximum est égal à : $\frac{2}{e}$ = **0,74 g/L** (à 10^{-2} près).

2. $f(\alpha)=0,5$ f est croissante sur [0;1].
$\alpha=0,36$ Au bout de 0,36 heure(22 minutes à une minute près), le taux d'alcoolémie du conducteur est supérieur à 0,5.
$f(\beta)=0,5$ f est décroissante sur [1;12].
$\beta=2,15$ Au bout de 2,35 heure (129 minutes=2 h 9 min), le taux d'alcoolémie du conducteur est inférieur à 0,5.
Donc le taux d'alcoolémie du conducteur reprend une valeur conforme à la législation au bout de 2 h 9 min.