Exercice 2 6 points

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

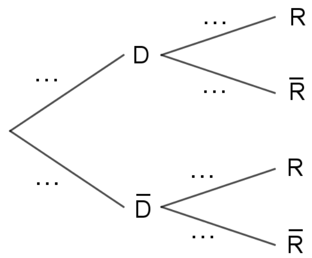
Partie A

Une entreprise produit des valises de deux types : des valises à deux roues et des valises à quatre roues.
Sur chacun des deux modèles, on effectue des tests afin d'évaluer leur solidité.

On dispose des informations suivantes sur le stock de production de cette entreprise :
. le stock contient 30 % de valises à deux roues ;
. 98 % des valises à deux roues réussissent les tests ;
. 95 % des valises à quatre roues réussissent les tests.

On choisit au hasard une valise de ce stock. On considère les événements suivants :
. D : « la valise a deux roues » ;
. R : « la valise réussit les tests ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, illustrant cette situation.



2. Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de 0,959.

3. Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?

Partie B

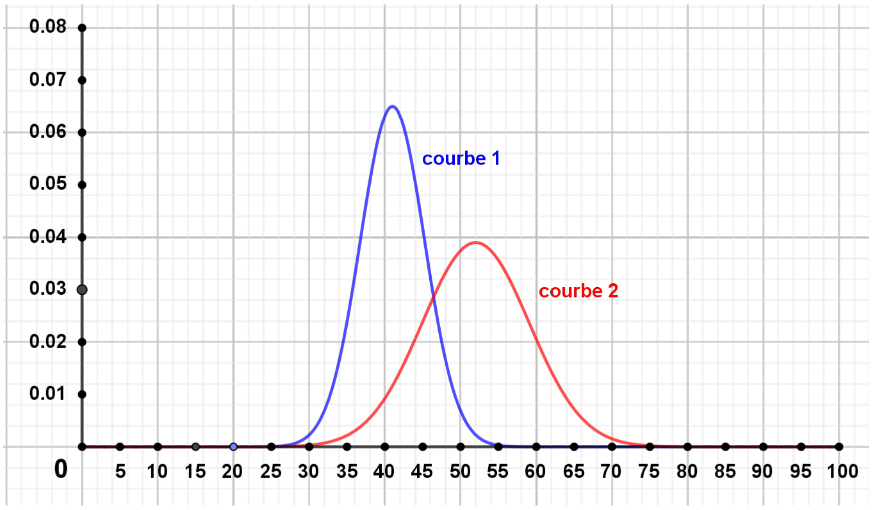
Parmi les tests de solidité effectués, l'un d'eux consiste à charger la valise et à la faire rouler sur une piste bosselée. On appelle « durée de vie » de la valise, le nombre de kilomètres parcourus avant d'atteindre une certaine usure des roues.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque valise à deux roues, associe sa durée de vie en kilomètre.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 41$ et d'écart-type $\sigma = 6$.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque valise à quatre roues, associe sa durée de vie en kilomètre.
On admet que Y suit la loi normale d'espérance $\mu' = 52$ et d'écart-type $\sigma' = 10$.

1. Quelle est la probabilité qu'une valise à deux roues ait une durée de vie supérieure à 52 kilomètres ?

2. Sur le graphique ci-après, on a représenté les densités associées aux variables aléatoires X et Y.
À l'aide de ce graphique, déterminer pour quel type de valise (à deux roues ou à quatre roues), la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 50 kilomètres est la plus gande.
Expliquer.



Partie C

L'entreprise souhaite commercialiser un nouveau modèle de valises. Afin de mieux connaître les attentes des consommateurs, elle réalise un sondage auprès de 2000 personnes . Parmi elles, 872 déclarent que la solidité est le principal critère pris en compte lors de l'achat (devant la légèreté , le prix, la couleur …).

1. Estimer par un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % la proportion de consommateurs pour lesquels la solidité est le principal critère de choix.

2. Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,04 ?

CORRECTION

Partie A

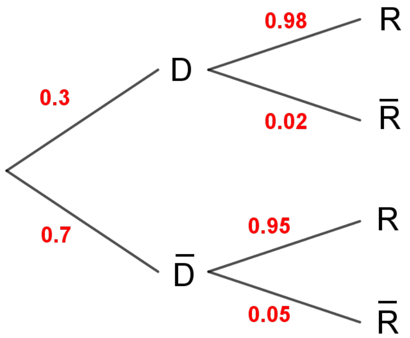
1. L'énoncé précise :

. Le stock contient 30 % de valises à deux roues.
Donc $P(D)=0{,}3$ et $P(\bar{D})=1-P(D)=1-0{,}3=0{,}7$

. 98 % des valises à deux roues réussissent les tests.
Donc $P_D(R)=0{,}98$ et $P_D(\bar{R})=1-P_D(R)=1-0{,}98=0{,}02$

. 95 % des valises à quatre roues réussissent les tests.
Donc $P_{\bar{D}}(R)=0{,}95$ et $P_{\bar{D}}(\bar{R})=1-P_{\bar{D}}(R)=1-0{,}95=0{,}05$

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
$P(R)=P(D\cap R)+P(\bar{D}\cap R)=P(D)\times P_D(R)+P(\bar{D})\times P_{\bar{D}}(R)=0{,}3\times 0{,}98+0{,}7\times 0{,}95=0{,}294+0{,}665$ = **0,959**

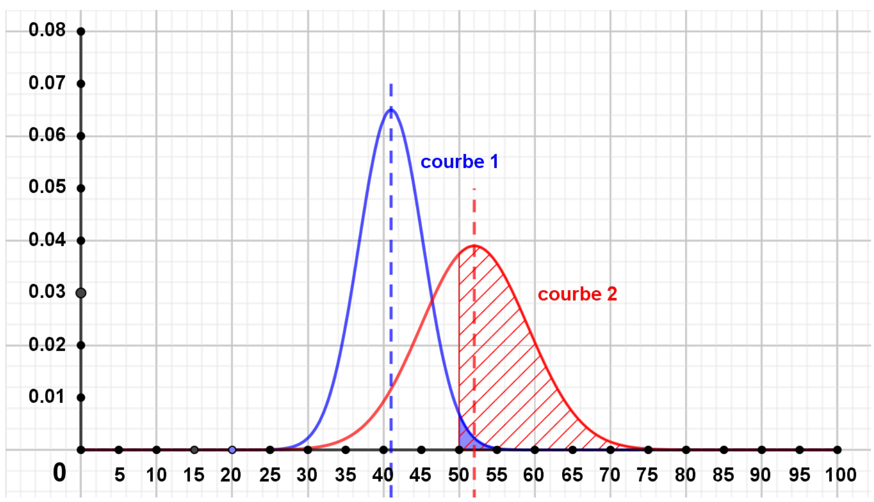
3. On nous demande de calculer $P_R(\bar{D})$

$P_R(\bar{D})=\dfrac{P(\bar{D}\cap R)}{P(R)}=\dfrac{0{,}665}{0{,}959}$ = **0,693.**

Partie B

1. X suit la loi normale d'espérance $\mu=41$ et d'écart-type $\sigma=6$.
On nous demande de déterminer : $P(X\geqslant 52)$.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X\geqslant 52)$ = **0,033.**

2.



La courbe 1 admet pour axe de symétrie la droite d'équation x=41 donc correspond à la variable X.
La courbe 2 admet pour axe de symétrie la droite d'équation x=52 donc correspond à la variable Y.

$P(X \geqslant 50)$ est l'aire du domaine plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe 1 sur l'intervalle $[50;+\infty[$, domaine coloré en bleu sur la figure.
$P(Y \geqslant 50)$ est l'aire du domaine plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe 2 sur l'intervalle $[50;+\infty[$, domaine hachuré en rouge sur la figure.

Le domaine coloré en bleu est contenu dans le domaine hachuré en rouge donc :
$P(X \geqslant 50) < P(Y \geqslant 50)$.

Partie C

1. La proportion, de clients déclarant que la solidité est le principal critère pris en compte pour l'achat d'une valise, observée dans l'échantillon de 2000 personnes est : $p=\frac{872}{2000}=0,436$.

$n \geqslant 2000 \qquad np=872 \geqslant 5 \qquad n(1-p)=1128 \geqslant 5$.
L'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, est :

$$I=\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,436-\frac{1}{\sqrt{2000}};0,436+\frac{1}{\sqrt{2000}}\right]$$

$\frac{1}{\sqrt{2000}}=0,022$ à 10^{-3} près.
$I=[0,436-0,022;0,436+0,022]$ = **[0,414;0,458].**

2. Pour un échantillon de taille n (entier naturel non nul),l'amplitude d'un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$\frac{2}{\sqrt{n}}=0,04 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{0,04}=\sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad 50=\sqrt{n} \quad \Leftrightarrow$ **2500 = n.**