

Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel doit être souscrit.

Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché. En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.

On estime, que chaque année :

- . 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- . 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- . les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.

On note a_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A pendant l'année (2017+n).

De même, on note b_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société B lors de l'année (2017+n).

On a donc $a_0=0,3$ et $b_0=0,7$.

1.a. Calculer a_1 . Interpréter le résultat.

1.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1}=0,97a_n+0,05b_n$ puis en déduire que : $a_{n+1}=0,92a_n+0,05$.

2.a. Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1
A ← 0.3
N ← 0
Tant que A ≤ 0.5
A ← 0.92xA+0.05
N ← N+1
Fin Tant que
Afficher 2017+N

Algorithme 2
A ← 0.3
N ← 0
Tant que A > 0.5
A ← 0.92xA+0.05
N ← N+1
Fin Tant que
Afficher 2017+N

Algorithme 3
A ← 0.3
N ← 0
Tant que A ≤ 0.5
A ← 0.92xA+0.05
Fin Tant que
N ← N+1
Afficher 2017 +N

2.b. Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0,625$.

3.a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0 .

3.b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = -0,325 \times 0,92^n + 0,625$.

3.c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat.

4. À l'aide l'expression donnée dans la question **3.b.** résoudre l'inéquation $a_n \geq 0,5$.
Quel résultat antérieur retrouve-t-on ?

CORRECTION

- 1.a.** 3 % des ascenseurs entretenus par la société A en 2017 sont entretenus par la société B en 2018 et 5 % des ascenseurs entretenus par la société B en 2017 sont entretenus par la société A en 2018 donc la proportion des ascenseurs entretenus par la société A en 2018 est égale à :

$$a_1 = a_0 - \frac{3}{100} \times a_0 + \frac{5}{100} \times b_0 = 0,97 a_0 + 0,05 b_0 = 0,97 \times 0,3 + 0,05 \times 0,7 = 0,291 + 0,035 = \mathbf{0,326}.$$

- 1.b.** Pour tout entier naturel n :

en (2017+n) la proportion des ascenseurs entretenus par la société A est a_n et celle de la société B est b_n ;

en (2017+n+1) la proportion des ascenseurs entretenus par la société A est a_{n+1} et celle de la société B est b_{n+1} ;

en effectuant le même raisonnement que pour la question **1.a.** on obtient, $a_{n+1} = a_n - \frac{3}{100} \times a_n + \frac{5}{100} \times b_n$

donc $a_{n+1} = 0,97 a_n + 0,05 b_n$.

Pour tout entier naturel n, on a : $a_n + b_n = 1$.

$a_{n+1} = 0,97 a_n + 0,05 (1 - a_n) = 0,92 a_n + 0,05$.

- 2.a.** Pour l'algorithme 2.

La valeur initiale affectée à A est 0,3 inférieure à 0,5 donc la boucle ne sera pas effectuée et la valeur affichée sera : 2017+0.

Pour l'algorithme 3.

L'instruction pour la nouvelle valeur de N n'est pas dans la boucle donc la valeur affichée sera 2017+1.

L'algorithme 1 affiche l'année à partir de laquelle la proportion sera supérieure à 0,5.

- 2.b.** On effectue l'exécution de l'algorithme boucle par boucle.

On donne le résultat après chaque boucle en arrondissant au millième.

On obtient :

N	a_n
0	0.3
1	0.326
2	0.35
3	0.372
4	0.392
5	0.411
6	0.428
7	0.444
8	0.458
9	0.472
10	0.484
11	0.495
12	0.506

En 2017+12 = 2029 la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A sera pour la première année supérieure à 50 %.

Remarque

On propose une programmation de l'algorithme en Python.

On ajoute à l'algorithme proposé les instructions pour obtenir les valeurs arrondies après chaque boucle.

Programme

```

print('Début de programme')
A=0.3
N=0
print("N="+str(N), "A="+str(A))
while A<=0.5:
    A=0.92*A+0.05
    B=round(1000*A)
    C=B/1000
    N=N+1
    print("N="+str(N), "A="+str(C))
M=2017+N
print("L'année demandée est:"+str(M))
print("Fin de programme")
    
```

Exécution

```

Début de programme
N=0 A=0.3
N=1 A=0.326
N=2 A=0.35
N=3 A=0.372
N=4 A=0.392
N=5 A=0.411
N=6 A=0.428
N=7 A=0.444
N=8 A=0.458
N=9 A=0.472
N=10 A=0.484
N=11 A=0.495
N=12 A=0.506
L'année demandée est:2029
Fin de programme
    
```

3. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = a_n - 0,625 \quad \text{donc} \quad a_n = u_n + 0,625$$

3.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,625 = 0,92 a_n + 0,05 - 0,625 = 0,92 \times (u_n + 0,625) - 0,575 = 0,92 u_n + 0,575 - 0,575$$

$$u_{n+1} = 0,92 u_n$$

(u_n) est la suite géométrique de raison $q=0,92$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 0,625 = 0,3 - 0,625 = -0,325$.

3.b. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n = -0,325 \times 0,92^n$$

$$\text{et } a_n = u_n + 0,625 = -0,325 \times 0,92^n + 0,625$$

3.c. $0 \leq 0,92 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,92^n = 0$

conséquence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,625$.

À long terme la société A effectuera l'entretien de 62,5 % des ascenseurs de la ville.

$$4. a_n \geq 0,5 \Leftrightarrow -0,325 \times 0,92^n + 0,625 \geq 0,5 \Leftrightarrow 0,125 \geq 0,325 \times 0,92^n \Leftrightarrow \frac{0,125}{0,325} \geq 0,92^n$$

La fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{0,125}{0,325}\right) \geq \ln(0,92^n) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{13}\right) \geq n \times \ln(0,92) \Leftrightarrow \ln(5) - \ln(13) \geq \ln(0,92) \times n$$

$$0 < 0,92 < 1 \text{ donc } \ln(0,92) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(5) - \ln(13)}{\ln(0,92)} \leq n$$

$$\frac{\ln(5) - \ln(13)}{\ln(0,92)} = 11,46 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel

$$\Leftrightarrow n \geq 12$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 12

On retrouve que $217 + 12 = 2029$ est la première année pour la quelle la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A est supérieure à 50 %.