Exercice 3   Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité   5 points

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.
On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017.
Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.
Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché.
En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.
On estime que chaque année :
. 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
. 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
. les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.
On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
Pour un ascenseur choisi au hasard, et pour tout entier naturel n, on note :
. a_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A l'année (2017+n) ;
. b_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société B l'année (2017+n) ;
. $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année (2017+n).
On a donc $P_0=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix}$.

Partie A

1.a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
1.b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Déterminer la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018.
3. Montrer que $P=\begin{pmatrix}0,625 & 0,375\end{pmatrix}$ est un état stable de la matrice et interpréter le résultat.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1}=0,92\,a_n+0,05$

Partie B

Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

1.a. Indiquer en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle la proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

A ← 0.3
N ← 0
Tant que A≤0.5
  A ← 0.92xA+0.05
  N ← N+1
Fin Tant que
Afficher 2017+N
	A ← 0.3
	N ← 0
	Tant que A >0.5
	  A ← 0.92xA+0.05
	  N ← N+1
	Fin Tant que
	Afficher 2017+N
		A ← 0.3
		N ← 0
		Tant que A≤0.5
		  A ← 0.92xA+0.05
		Fin Tant que
		N ← N+1
		Afficher 2017 +N

1.b. Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=a_n-0,625$.
2.a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0
2.b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n=-0,325\times0,92^n+0,625$.
2.c. Déterminer la limite de la suite (a_n) . Interpréter le résultat.

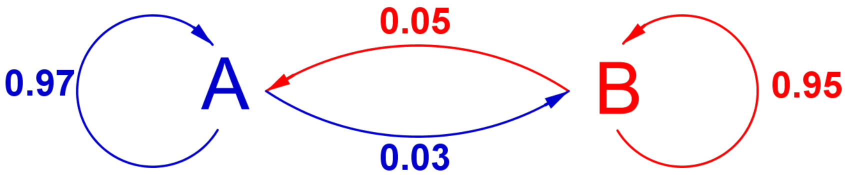
3. À l'aide de l'expression donnée dans la question **2.b.** résoudre l'inéquation : $a_n\geqslant0,5$.
Quel résultat antérieur retrouve-t-on ?

CORRECTION

Partie A

1.a. Les sommets du graphe sont A et B.

- Chaque année, 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ; les autres ascenseurs entretenus par la société A (97%) ne changeront pas d'ascensoriste l'année suivante.
  Le poids de l'arête AB est égal à 0,03.
  Le poids de l'arête AA est égal à 0,97.
- Chaque année, 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ; les autres ascenseurs entretenus par la société B (95%) ne changeront pas d'ascensoriste l'année suivante.
  Le poids de l'arête BA est égal à 0,05.
  Le poids de l'arête BB est égal à 0,95.
- On obtient le graphe probabiliste suivant :



1.b. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.
Dans cet exercice on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe probabiliste est la matrice $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,97
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,03
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,05
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,95

$M=\begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

2. $P_1 = (a_1 \quad b_1) \qquad P_0 = (0{,}3 \quad 0{,}7)$

$P_1 = P_0 M \iff (a_1 \quad b_1) = (0{,}3 \quad 0{,}7)\begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = (0{,}3\times 0{,}97 + 0{,}7\times 0{,}05 \quad 0{,}3\times 0{,}03 + 0{,}7\times 0{,}9)$

$P_1 = (0{,}291 + 0{,}035 \quad 0{,}009 + 0{,}665) = (0{,}326 \quad 0{,}674)$

La probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018 est : $a_1 = 0{,}326$.

3. $P = (x \quad y)$ est un état stable de la matrice M si et seulement si $\begin{cases} P = PM \\ x + y = 1 \end{cases}$.

$0{,}625 + 0{,}375 = 1$

et $(0{,}625 \quad 0{,}375)\begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = (0{,}625\times 0{,}97 + 0{,}375\times 0{,}05 \quad 0{,}625\times 0{,}03 + 0{,}375\times 0{,}95)$

$= (0{,}60625 + 0{,}01875 \quad 0{,}01875 + 0{,}35625) = (0{,}625 \quad 0{,}375)$

donc $P = (0{,}625 \quad 0{,}375)$ est un état stable de la matrice.

Conséquence

À long terme, chaque année 62,5 % des ascenseurs de la ville seront entretenus par la société A et 37,5 % des ascenseurs de la ville sont entretenus par la société B.

4. Pour tout entier naturel n : $P_{n+1}=P_n M$

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}97 & 0{,}03\\0{,}05 & 0{,}95\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}097\,a_n+0{,}05\,b_n & 0{,}03\,a_n+0{,}95\,b_n\end{pmatrix}$$

donc $a_{n+1}=0{,}97\,a_n+0{,}05\,b_n$

Or $a_n+b_n=1$

$a_{n+1}=0{,}97\,a_n+0{,}05(1-a_n)=0{,}92\,a_n+0{,}05$

Partie B

1.a. Pour l'algorithme 2 ;
La valeur initiale affectée à A est 0,3 inférieure à 0,5 donc la boucle ne sera pas effectuée et la valeur affichée sera : 2017+0.
Pour l'algorithme 3.
L'instruction pour la nouvelle valeur de N n'est pas dans la boucle donc la valeur affichée sera 2017+1.
L'algorithme 1 affiche l'année à partir de laquelle la proportion sera supérieure à 50 %

1.b. On effectue l'exécution de l'algorithme boucle par boucle.
On donne le résultat après chaque boucle en arrondissant au millième.
On obtient :

N	a_n
0	0.3
1	0.326
2	0.35
3	0.372
4	0.392
5	0.411
6	0.428
7	0.444
8	0.458
9	0.472
10	0.484
11	0.495
12	0.506

En 2017+12 = 2029 la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A sera pour la première année supérieure à 50 %.

Remarque
On propose une programmation de l'algorithme en Python.
On ajoute à l'algorithme proposé les instructions pour obtenir les valeurs arrondies après chaque boucle.

Programme

```
print('Début de programme')
A=0.3
N=0
print("N="+str(N),"A="+str(A))
while A<=0.5:
    A=0.92*A+0.05
    B=round(1000*A)
    C=B/1000
    N=N+1
    print("N="+str(N),"A="+str(C))
M=2017+N
print("L'année demandée est:"+str(M))
print ("Fin de programme")
```

Exécution

```
Début de programme
N=0 A=0.3
N=1 A=0.326
N=2 A=0.35
N=3 A=0.372
N=4 A=0.392
N=5 A=0.411
N=6 A=0.428
N=7 A=0.444
N=8 A=0.458
N=9 A=0.472
N=10 A=0.484
N=11 A=0.495
N=12 A=0.506
L'année demandée est:2029
Fin de programme
```

2. Pour tout entier naturel n :

$u_n = a_n - 0{,}625$ donc $a_n = u_n + 0{,}625$

2.a. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}625 = 0{,}92\,a_n + 0{,}05 - 0{,}625 = 0{,}92 \times (u_n + 0{,}625) - 0{,}575 = 0{,}92\,u_n + 0{,}575 - 0{,}575$

$u_{n+1} = 0{,}92\,u_n$

(u_n) est la suite géométrique de raison q=0,92 et de premier terme $u_0 = a_0 - 0{,}625 = 0{,}3 - 0{,}625 = -0{,}325$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$u_n = u_0 \times q^n = -0{,}325 \times 0{,}92^n$

et $a_n = u_n + 0{,}625 = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.

2.c. $0 \leqslant 0{,}92 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}92^n = 0$

conséquence : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}625$

À long terme la société A effectuera l'entretien de 62,5 % des ascenseurs de la ville.

3. $a_n \geqslant 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625 \geqslant 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}125 \geqslant 0{,}325 \times 0{,}92^n \Leftrightarrow \dfrac{0{,}125}{0{,}325} \geqslant 0{,}92^n$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{0{,}125}{0{,}325}\right) \geqslant \ln(0{,}92^n) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{5}{13}\right) \geqslant n \times \ln(0{,}92) \Leftrightarrow \ln(5) - \ln(13) \geqslant \ln(0{,}92) \times n$

$0 < 0{,}92 < 1$ donc $\ln(0{,}92) < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(5) - \ln(13)}{\ln(0{,}92)} \leqslant n$

$\dfrac{\ln(5) - \ln(13)}{\ln(0{,}92)} = 11{,}46$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow n \geqslant 12$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 12

On retrouve que 2017+2=2029 est la première année pour laquelle la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A est supérieure à 50 %.