Exercice 4 — 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Les quatre affirmations sont indépendantes.

1. Un caractère est présent dans une population selon la proportion p=0,1.
Dans un échantillon de 400 personnes, on observe ce caractère sur 78 individus.

Affirmation 1 : Au seuil de 95 %, cet échantillon est représentatif de la population totale pour ce caractère.

Rappel : Lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donné par :

$$I=\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p+196\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

2. Dans une gare, le temps d'attente à un guichet donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme de l'intervalle [1;7].

Affirmation 2 : Le temps d'attente moyen à ce guichet est de 4 minutes.

3. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$.

Affirmation 3 : La valeur moyenne de g sur l'intervalle [-2;2] est égale à $\frac{16}{3}$.

4. x désigne un nombre réel négatif.

Affirmation 4 : $\ln(e^{x+1})-\ln(e^x)$ est un nombre positif quel que soit le nombre réel x.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : **FAUSSE**

Justification

$p=0{,}1 \quad n=400 \geqslant 30 \quad np=40 \geqslant 5 \quad n(1-p)=360 \geqslant 5$

I est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\left[0{,}1-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1\times 0{,}9}{400}}\,;0{,}1+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}1\times 0{,}9}{400}}\right]$$

$$1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1\times 0{,}9}{400}}=0{,}0294$$

$$I=[0{,}0706\,;0{,}1294]$$

La fréquence observée dans l'échantillon de 400 personnes est : $f=\frac{78}{400}=0{,}195$.

0,195 n'appartient pas à l'intervalle I donc au seuil de 95 %,cet échantillon n'est pas représentatif de la population totale pour ce caractère.

2. Affirmation 2 : **VRAIE**

Justification

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'intervalle [1;7] est :

$$E(X)=\frac{1+7}{2}=4.$$

Donc le temps d'attente moyen à ce guichet est de 4 minutes.

3. Affirmation 3 : **FAUSSE**

Justification

La valeur moyenne de g sur l'intervalle [-2;2] est : $\mu=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} g(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$

$G(x)=\frac{x^3}{3}$ G est une primitive de g sur [-2;2].

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,dx=G(-2)-G(2)=\frac{8}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

$$\mu=\frac{1}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\neq\frac{16}{3}$$

4. Affirmation 4 : **VRAIE**

Justification

Pour tout nombre réel x :

$e^x>0 \quad e^{x+1}>0 \quad \ln(e^x)=x \quad \ln(e^{x+1})=x+1$

donc $\ln(e^{x+1})-\ln(e^x)=x+1-x=1>0$.