Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.
Franck joue en ligne sur internet.

Partie A

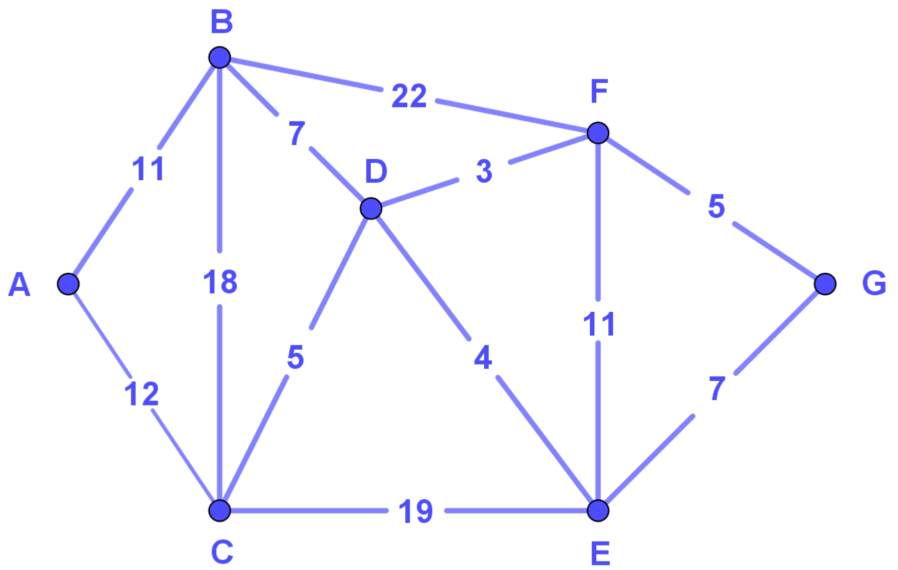
Après plusieurs semaines, des statistiques données par le logiciel lui permettent de dire que :
. quand il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,65 ;
. quand il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,42.

On note G l'état : « Franck gagne la partie » et P l'état : « Franck perdla partie ».
Sur une période donnée, on note, pour tout entier naturel n non nul :
. g_n la probabilité que Franck gagne la $n^{\text{ième}}$ partie ;
. p_n la probabilité que Franck perde la $n^{\text{ième}}$ partie.
Dans cette période Franck a gagné la première partie.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets notés G et P.
2.a. Écrire la matrice de transition M dans l'ordre G-P.
2.b. Calculer la probabilité que Franck gagne la troisième partie.
3. Déterminer l'état stable du système et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.
On a représenté ci-dessous le graphe modélisant ces catacombes.
Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs.
Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1.a. Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.
1.b. Donner un tel chemin.
2. Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G.
Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?
3. Une fois arrivé en salle G, Franck souhaite revenir en salle A en affrontant le moins de monstres possible afin de recommencer une nouvelle partie ?
Déterminer ce trajet minimal et préciser le nombre de monstres affrontés.

CORRECTION

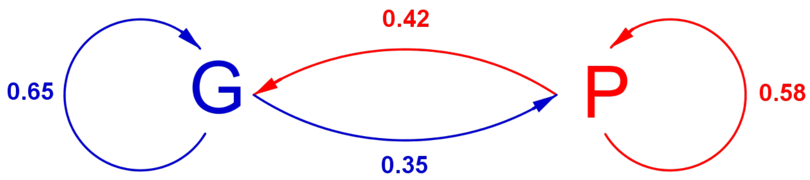
Partie A

1. On note :
G l'état : « Franck gagne la partie »
P l'état : « Franck perd la partie »
G et P sont les deux sommets du graphe probabiliste.

. Quand Franck gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à 0,65 donc la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à 1-0,65=0,35.
Conséquences
Le poids de l'arête GG est : 0,65.
Le poids de l'arête GP est : 0,35.

. Quand Franck perd une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à 0,42 donc la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à : 1-0,42=0,58.
Conséquences
Le poids de l'arête PG est : 0,42.
Le poids de l'arête PP est : 0,58.

. On obtient le graphe probabiliste :



2.a. L'ordre des sommets est l'ordre G-P.
Dans cet exercice, on utilisera les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe probabiliste est $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête GG : 0,65
m_{12} est le poids de l'arête GP : 0,35
m_{21} est le poids de l'arête PG : 0,42
m_{22} est le poids de l'arête PP : 0,58

$M = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix}$

2.b. Franck a gagné la première partie donc $(g_1 \quad p_1) = (1 \quad 0)$

$(g_2 \quad p_2) = (g_1 \quad p_1)\,M = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix} = (0{,}65 \quad 0{,}35)$

$(g_3 \quad p_3) = (g_2 \quad p_2)\,M = (0{,}65 \quad 0{,}35)\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix}$

$(g_3 \quad p_3) = (0{,}65\times0{,}65 + 0{,}35\times0{,}42 \quad 0{,}65\times0{,}35 + 0{,}35\times0{,}58) = (0{,}4225 + 0{,}147 \quad 0{,}2275 + 0{,}203)$

$(g_3 \quad p_3) = (0{,}5695 \quad 0{,}4305)$

La probabilité que Franck gagne la troisième partie est : g_3 =0,5695.

3. P= $(x \quad y)$ est l'état stable du système si et seulement si $\begin{cases} P = PM \\ x+y=1 \end{cases}$

$P = PM \Leftrightarrow (x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}65\,x + 0{,}42\,y \\ y = 0{,}35\,x + 0{,}58\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}35\,x - 0{,}42\,y = 0 \\ 0{,}35\,x - 0{,}42\,y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \{35x-42y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \{5x-6y=0$

Et $\quad x+y=1$

$5x-6(1-x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 11x=6 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{6}{11}$ et $y=1-\dfrac{6}{11}=\dfrac{5}{11}$

L'état stable est P= $\begin{pmatrix} \dfrac{6}{11} & \dfrac{5}{11} \end{pmatrix}$ **.**

Pour un très grand nombre de parties, la probabilité de Franck de gagner une partie est égale à $\dfrac{6}{11}$ (et la probabilité de perdre une partie est $\dfrac{5}{11}$).

Partie B

1.a. Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

On donne les degrés des sommets sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	4	4	4	4	2

Il est donc possible, au départ d'une salle quelconque d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

1.b. Exemple

A-B-F-D-B-C-D-E-F-G-E-C-A

2. Franck ne peut pas en partant de la salle A et arriver à la salle G en passant une et une seule fois par chaque arête car, en partant de A il peut aller en B (ou C) il il devra revenir en A en passant par C (ou B) pour parcourir l'arete AC (ou AB) et il n'existe pas d'autre arête permettant de repartir sans passer par B ou C.

3. On utilise l'algorithme de Dijkstra.

G	F	E	D	C	B	A
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(G)	5(G)	7(G)	∞	∞	∞	∞
	5(G)	7(G)	8(F)	∞	27(F)	∞
		7(G)	8(F)	26(E)	27(F)	∞
			8(F)	13(D)	15(D)	∞
				13(D)	15(D)	25(C)
					15(D)	25(C)
						25(C)

Le trajet minimal est G-F-D-C-A et il affrontera 25 monstres.