Exercice 3 — 5 points

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 1{,}028\, v_n \end{cases}$$

1.a. Parmi les deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle et géométrique ; donner leurs raisons respectives.

1.b. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n.

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
   U ← U+0.4
   V ← Vx1.028
28
   n ← n+1
Fin tant que
```

En sortie de cet algorithme, n a pour valeur 46.
Interpréter ce résultat.

3. En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie « *An essay on the principle of population* » dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.

Il écrit :
« Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique [. . .] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance , dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique. »

En 1800, la population de l'Angleterre est estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que le progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année.
On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.

3.a. Quelle aurait été, en million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ?
On arrondira le résultat au millième .

3.b. À partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait-elle dépassé 16 millions d'habitants ?

3.c. À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait-elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

CORRECTION

1.a. (u_n) est la suite **arithmétique** de premier terme $u_0=10$ et de raison **r= 0,4.**

(v_n) est la suite **géométrique** de premier terme $v_0=8$ et de raison **q= 1,028.**

1.b. Pour tout entier naturel n

$u_n=u_0+nr=10+0,4n$

$v_n=v_0\times q^n=8\times 1,028^n$

2. n=46 est le plus petit entier naturel tel que $u_n \leqslant v_n$.

Remarque

On peut programmer l'algorithme en utilisant le logiciel Python et en ajoutant l'instruction Afficher:n.

Programme

```
print('Début de programme')
n=0
U=10
V=8
while U>V:
    U=U+0.4
    V=V*1.028
    n=n+1
print("n="+str(n))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
n=46
Fin de programme
```

3.a. La population d'Angleterre, en million d'habitants, en $1810=1800+10$ aurait été égale à $v_{10}=8\times 1,028^{10}=10,544$ à 10^{-3} près (en utilisant la calculatrice).

3.b. $8\times 1,028^n \geqslant 16 \quad\Leftrightarrow\quad 1,028^n \geqslant 2$

ln est une fonction croissante

$\Leftrightarrow \quad \ln(1,028^n) \geqslant \ln(2) \quad\Leftrightarrow\quad n\times\ln(1,028) \geqslant \ln(2)$

$1,028>1$ donc $\ln(1,028) > 0$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,028)}=25,1$ à 10^{-1} près

n est un entier naturel donc $n \geqslant 26$

En $1800+26$ = **1826** la population d'Angleterre aurait dépassé **16 millions** d'habitants.

3.c. En 1800+46= **1846** $u_n \leqslant v_n$ donc la population de l'Angleterre serait trop grande pour ne plus être suffisamment noorrie par son agriculture.