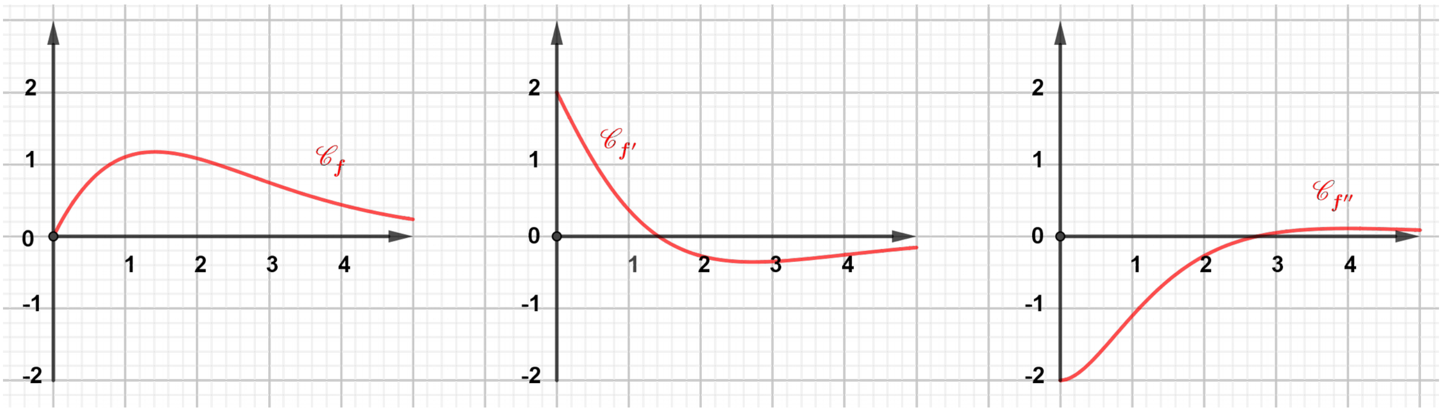
Exercice 4 — 6 points



On donne ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0;5] ainsi que les courbes représentatives $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.

2.a. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel f semble convexe.

2.b. Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.
Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.

3. Parmi les équatios suivantes quelle est l'équation de la tangente de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

$y=x$ $\qquad$ $y=x+1$ $\qquad$ $y=2x$ $\qquad$ $y=\frac{3}{4}x$

4. On note I= $\int_0^1 f'(x)\,dx$ où f ' est la fonction dérivée de f.

Comment s'interprète graphiquement ce nombre I ?

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus sur l'intervalle [0;5] par $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$.

1.a. Montrer que la dérivée f ' de f est définie par $f'(x)=(-x^2+2)e^{-x}$ pour tout réel de l'intervalle [0;5].

1.b. Déterminer les variations de f sur [0;5] et préciser l'abscisse de son maximum.

1.c. Donner la valeur arrondie au millième du maximum de f.

2. Avec un outil de calcul on obtient pour $\int_0^1 f'(x)\,dx$ et $f(1)$, la même valeur approchée : 1,10364.

Ces deux valeurs sont-elles égales ?

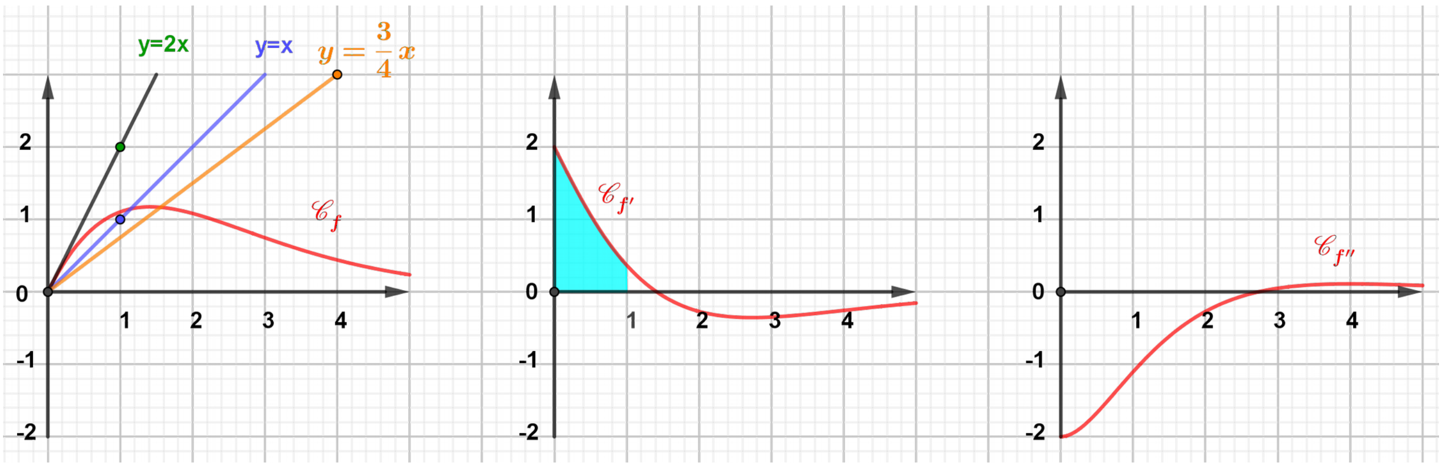
CORRECTION

1. L'abscisse du point pour laquelle f est maximale est comprise **entre 1 et 2.**

2.a. f est convexe sur **[3;5].**

2.b. La fonction dérivée seconde est nulle et change de signe pour une valeur comprise entre 2 et 3.
Donc $\mathscr{C}_f$ admet **un point d'inflexion** d'abscisse comprise **entre 2 et 3.**

3. Le point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f est l'origine donc la tangente doit passer par l'origine et la deuxième proposition est fausse.
On trace les droites d'équations :
y=x Droite passant par l'origine et le point de coordonnées (1;1).
y=2x Droite passant par l'origine et le point de coordonnées (1;2).
$y=\frac{3}{4}x$ Droite passant par l'origine et le point de coordonnées (4;3).



Donc la tangente à la courbe à l'origine a pour équation **y=2x**.

4. f' est positive et continue sur [0;1] donc I= $\int_0^1 f'(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan située entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ et les droite d'équations x=0 et x=1. (Partie colorée en bleu sur la figure)

Partie B

1.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;5], $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $\quad (x^2+2x)'=2x+2$

$f'(x)=(x^2+2x)(-e^{-x})+(2x+2)e^{-x}=(-x^2-2x+2x+2)e^{-x}=(-x^2+2)e^{-x}$

1.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;5], $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-x^2+2)$

$-x^2+2=(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)$.

Le signe de $f'(x)$ sur [0;5] est le signe de $(\sqrt{2}-x)$.

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2}$		5
f '(x)		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

L'abscisse du maximum de f est $\sqrt{2}$.

3.a. $f(\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}=$ **1,174.**

3.b. **Ces deux valeurs sont égales**

f est une primitive de f ' sur [0;1].

car $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = f(1)$ $\quad$ ($f(0)=0$).