

Exercice 1

6 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à l'unité.

Une grande enseigne souhaite étudier l'évolution du chiffre d'affaires de vente de ses produits « bio ». Les données collectées ces dernières années sont les suivantes :

Années	2012	2013	2014	2015	2016	2017
chiffre d'affaires (millier d'euros)	330	361	392	432	489	539

- Calculer le taux d'évolution en pourcentage du chiffre d'affaires entre 2012 et 2013.
- Le cabinet d'étude avait, en 2012, conduit une étude et modélisé le chiffre d'affaires des ventes de produits bio par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n représentait le chiffre d'affaires, exprimé en millier d'euros, de l'année 2012+n.
 Dans cette modélisation, on suppose que le chiffre d'affaires augmente de 9% chaque année à partir de 2012 et on construit un algorithme donnant en sortie le terme u_n pour un entier naturel n donné par l'utilisateur.
- a. Dans les algorithmes ci-dessous, N est un entier, donné par l'utilisateur, qui désigne le nombre d'années écoulées depuis l'année 2012 et U un nombre réel qui désigne le chiffre d'affaires en 2012+N.
 Justifier que les algorithmes A et C ne conviennent pas.

Algorithme A
$U \leftarrow 330$ Pour i variant de 1 à N $W \leftarrow 1.09 \times U$ Fin Pour

Algorithme B
$U \leftarrow 330$ Pour i variant de 1 à N $U \leftarrow 1.09 \times U$ Fin Pour

Algorithme C
Pour i variant de 1 à N $U \leftarrow 330$ $U \leftarrow 1.09 \times U$ Fin Pour

On admet que l'algorithme B convient.

- b. Pour la valeur 5 de N saisie dans l'algorithme B, recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous.

valeur de i		1	...
valeur de U	330		...

- c. Justifier, qu'au vu de ces résultats, le cabinet d'étude conclut que ce modèle n'est pas pertinent dès 2016.
- Le cabinet d'étude décide de modéliser ce chiffre d'affaires, exprimé en millier d'euros, par la suite (v_n) définie par $v_0 = 432$ et $v_{n+1} = 0,9v_n + 110$ pour tout entier naturel n .
 Le terme v_n représente alors ce chiffre d'affaires en 2015+n.
 - Calculer v_1 et v_2 .
 - On pose $w_n = v_n - 1100$ pour tout entier naturel n . Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n .
 En déduire que $v_n = 1100 - 668 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n .
 - Ce modèle permet-il d'envisager que le chiffre d'affaires dépasse un jour 2 millions d'euros ?

CORRECTION

1. Le taux d'évolution du chiffre d'affaires entre 2012 et 2013 est :

$$\frac{361 - 330}{330} \times 100 = \frac{3100}{330} = \frac{310}{33} = 9,39 \text{ arrondi à l'unité : } \mathbf{9 \%}.$$

2.a. L'algorithme A est faux car, à chaque boucle, on affecte à W la valeur $1,09 \times 330 = 360$ (arrondi à l'unité). L'algorithme C est faux car, à chaque boucle, la première instruction affecte à U la valeur 330.

2.b. On programme en python l'algorithme B, en ajoutant une instruction pour donner l'arrondi à l'unité.

Programme

```
print('Début de programme')
U=330
i=0
for j in range(5):
    i=i+1
    U=1.09*U
    V=round(U)
    print("i="+str(i), "U="+str(V))
print ('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
i=1 U=360
i=2 U=392
i=3 U=427
i=4 U=466
i=5 U=508
Fin de programme
```

On complète le tableau :

valeur de i		1	2	3	4	5
valeur de U	330	360	392	427	466	508

2.c. En 2016, le chiffre d'affaires, en milliers d'euros est 489 or l'algorithme nous donne pour valeur 466, une différence de 23 mille euros.

3. (v_n) est la suite définie par $v_0 = 432$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 0,9v_n + 110$.

3.a. $v_1 = 0,9 \times 432 + 110 = 499$ (arrondi à l'unité).

$$v_2 = 0,9 \times 498,8 + 110 = 559 \text{ (arrondi à l'unité).}$$

3.b. Pour tout entier naturel n :

$$w_n = v_n - 1100 \text{ donc } v_n = w_n + 1100$$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - 1100 = 0,9v_n + 110 - 1100 = 0,9 \times (w_n + 1100) - 990 = 0,9w_n + 990 - 990 = 0,9w_n$$

$$w_0 = v_0 - 1100 = 432 - 1100 = -668$$

(w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = -668$ et de raison $q = 0,9$.

3.c. Pour tout entier naturel n :

$$w_n = w_0 \times q^n = -668 \times 0,9^n$$

$$\text{Donc } v_n = w_n + 1100 = 1100 - 668 \times 0,9^n.$$

3.d. Pour tout entier naturel n : $668 \times 0,9^n > 0$ donc $v_n < 1100 < 2000$.

Ce modèle ne permet pas d'envisager que le chiffre d'affaires dépasse un jour 2 millions d'euros.