Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un laboratoire en botanique étudie l'évolution d'une espèce végétale en fonction du temps.
Cette espèce compte initialement 2 centaines d'individus.
Au bout de 2 semaines, l'espèce végétale compte 18 centaines d'individus.
Au bout de 3 semaines, l'espèce végétale prolifère et s'élève 30,5 centaines d'individus.
Au bout de 10 semaines, on en compte 90 centaines.
On modélise cette évolution par une fonction polynomiale f donnant le nombre d'individus de l'espèce, exprimé en centaine, en fonction du temps écoulé x, exprimé en semaine.
Ainsi $f(2)=18$; $f(3)=30{,}5$ et $f(10)=90$.
On admet que f(x) peut s'écrire $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,où a, b, c et d sont des réels.

1. Justifier que $d=2$.

2. Montrer que a, b et c sont solutions du système :

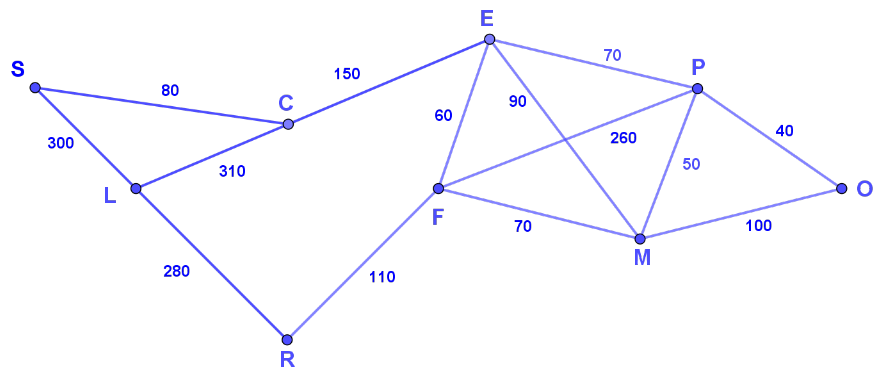
$$\begin{cases} 8a+4b+2c = 16 \\ 27a+9b+3c = 28{,}5 \\ 1000a+100b+10c = 88 \end{cases}$$

3. Déterminer les matrices A, X et B qui permettent d'écrire le système précédent sous la forme $AX=B$.

4. En supposant que l'évolution suit, sur l'intervalle [0;13], le modèle décrit par la fonction f, déterminer au bout de combien de temps la quantité de l'espèce étudiée sera maximale (arrondir à la semaine près).

Partie B

Le laboratoire en botanique possède un parc d'étude dans lequel est observée l'évolution de différentes espèces d'arbres.
Les agents chargés du nettoyage circulent dans le parc depuis le local technique (L) jusqu'aux différentes parcelles plantées d'arbres:C , E, F, M, O, P, R et S.
Les sommets du graphe ci-dessous représentent les différentes parcelles, les arêtes marquent les allées permettant de se déplacer dans le parc.
Les étiquettes rapportent la distance en mètre entre les parcelles.



1.a. Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et en y revenant ? Si oui, donner un tel parcours.

1.b. Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et sans nécessairement y revenir ? Si oui, donner un tel parcours.

2. Déterminer un parcours de distance minimale joignant le local technique à la parcelle O.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
L'énoncé précise : cette espèce compte initialement 2 centaines d'individus donc $f(0)=2$ soit :
$a\times0^3+b\times0^2+c\times0+d=2 \quad \Leftrightarrow \quad$ **d=2**

2. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$
Au bout de 2 semaines l'espèce végétale compte 18 centaines d'individus.
$f(2)=18 \quad \Leftrightarrow \quad a\times2^3+b\times2^2+c\times2+2=18 \quad \Leftrightarrow \quad 8a+4b+2c=16$
Au bout de 3 semaines, l'espèce prolifère et s'élève à 30,5 centaines d'individus.
$f(3)=30{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad a\times3^3+b\times3^2+c\times3+2=30{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 27a+9b+3c=28{,}5$
Au bout de 10 semaines, on en compte 90 centaines.
$f(10)=90 \quad \Leftrightarrow \quad a\times10^3+b\times10^2+c\times10+2=90 \quad \Leftrightarrow \quad 1000a+100b+10c=88$

donc $\begin{cases} 8a+4b+2c &= 16 \\ 27a+9b+3c &= 28{,}5 \\ 1000a+100b+10c &= 88 \end{cases}$

3. $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \\ 1000 & 100 & 10 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 18 \\ 28{,}5 \\ 88 \end{pmatrix}$

$AX=B$ est l'écriture matricielle du système précédent.
Remarque
Dans cet exercice on utilise les matrices colonnes.

4. En utilisant la calculatrice on obtient la matrice inverse de A.
$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}06 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}81 & 0{,}57 & -0{,}01 \\ 1{,}88 & -0{,}95 & 0{,}01 \end{pmatrix}$
$AX=B \quad \Leftrightarrow \quad X=A^{-1}B$

On obtient avec la calculatrice $X=\begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 2{,}5 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}$

donc $f(x)=-0{,}2x^3+2{,}5x^2+3{,}8x+2$.

5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x)=-0{,}6x^2+5x+3{,}8$
$\Delta=5^2-4\times(-0{,}6)\times3{,}8=34{,}12$
$x_1=\dfrac{-5-\sqrt{\Delta}}{-1{,}2}=9{,}03$ à 10^{-2} près. $\qquad x_2=\dfrac{-5+\sqrt{\Delta}}{-1{,}2}=-0{,}70$ à 10^{-2} près
On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		x_2	0		x_1	13		$+\infty$
f'(x)		$-$	0		$+$	0		$-$	

Sur l'intervalle [0;13], f admet un maximum pour x_1 =9 (arrondi à l'unité)
Conclusion
Au bout de 9 semaines l'espèce étudiée sera maximale.

Partie B

1.a. On nous demande s'il existe un cycle eulérien.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le degré de chaque sommets est pair.

On donne les degrés des sommets sous la forme d'un tableau.

Sommets	L	C	E	F	M	O	P	R	S
Degrés	3	3	4	4	4	2	4	2	2

Conséquence

Deux sommets du graphe ont un degré impair, donc il n'existe pas du cycle eulérien.

Il n'existe pas de parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et en y revenant.

1.b. On nous demande s'il existe une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Si le nombre de sommets de degré impair est deux alors toute chaîne eulérienne a pour extrémités ces deux sommets.

Conséquence

Il existe un parcours empruntant toutes les allées une et seule fois, en partant du local technique (L) et sans nécessairement y revenir.

Exemple

L-C-S-L-R-F-M-O-P-M-E-P-F-E-C

2. On utilise l'algorithme de Dijkstra.

L	C	E	F	M	P	R	S	O
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(L)	310(L)	∞	∞	∞	∞	280(L)	300(L)	∞
	310(L)	∞	390(R)	∞	∞	280(L)	300(L)	∞
	310(L)	∞	390(R)	∞	∞		300(L)	∞
	310(L)	460(C)	390(R)	∞	∞			∞
		450(C)	390(R)	460(F)	650(F)			∞
		450(C)		460(F)	640(E)			∞
				460(F)	510(M)			560(M)
					510(M)			550(P)
								550(P)

Le parcours de distance minimale joignant le local technique à la parcelle O est : L-R-F-M-P-O et la distance minimale est: 550 m.