

Exercice 4

6 points

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur copie le numéro de la question et la réponse choisie.

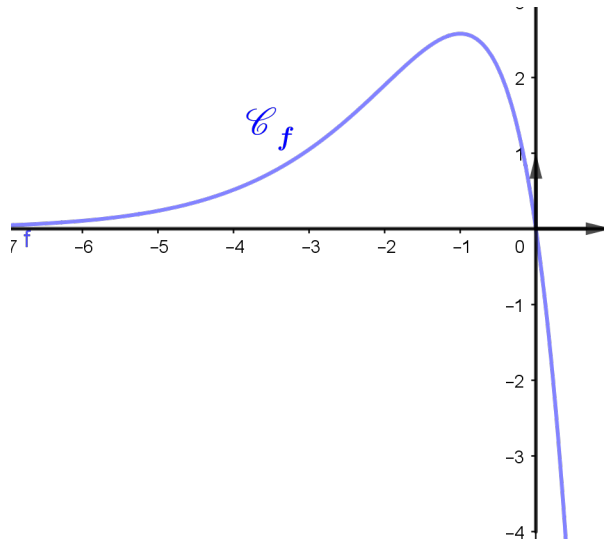
Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -7xe^x$.

Cette fonction admet sur \mathbb{R} une dérivée f' et une dérivée seconde f'' .

On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



1. On note F une primitive de f sur \mathbb{R} , une expression de $F(x)$ peut être :

- a. $(-7-7x)e^x$
- b. $-7e^x$
- c. $-7xe^x$
- d. $(-7x+7)e^x$

2. Soit A l'aire, exprimée en unité d'aire, comprise entre la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=0$. On a :

- a. $3 < A < 4$
- b. $5 < A < 6$
- c. $A < 0$
- d. $A > 7$

3. On a :

- a. f' est positive sur l'intervalle $[-6;0]$;
- b. f est convexe sur l'intervalle $[-1;0]$;
- c. \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion pour $x=-1$.
- d. f'' change de signe en $x=-2$

Partie B

On considère la loi normale X de paramètres $\mu=19$ et $\sigma=5$.

4. La meilleure valeur approchée de $P(19 \leq X \leq 25)$ est :

- a. 0,385
- b. 0,084
- c. 0,885
- d. 0,5

5. Une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geq 25)$ est :

- a. $p=0,885$
- b. $p=0,115$
- c. $p=0,385$
- d. $p=0,501$

6. Le nombre entier k tel que $P(X > k) = 0,42$ à 10^{-2} près est :

- a. $k=19$
- b. $k=29$
- c. $k=20$
- d. $k=14$

CORRECTION

1. Réponse : d

$$F(x) = (-7 + 7x)e^x$$

Justification non demandée

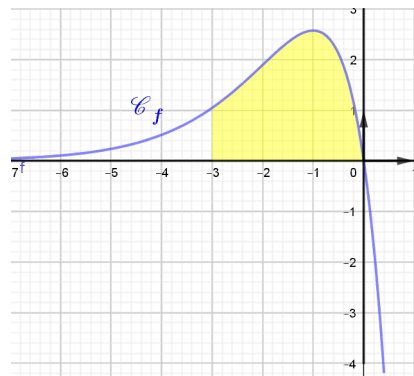
- $F_a(x) = (-7 - 7x)e^x$ $F'_a(x) = -7e^x + (-7 - 7x)e^x = (-14 - 7x)e^x \neq f(x)$
- $F_b(x) = -7e^x$ $F'_b(x) = -7e^x \neq f(x)$
- $F_c(x) = -7xe^x$ $F'_c(x) = -7e^x - 7xe^x = (-7 - 7x)e^x \neq f(x)$
- $F_d(x) = (-7x + 7)e^x$ $F'_d(x) = -7e^x + (-7x + 7)e^x = -7xe^x = f(x)$

2. Réponse : b

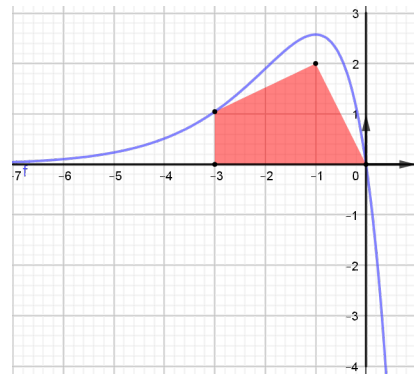
$$5 < A < 6$$

Justification non demandée

- A est de la partie de plan colorée en jaune sur la figure suivante.



- Le polygone coloré en rouge sur la figure suivante est contenu dans la partie colorée en jaune.

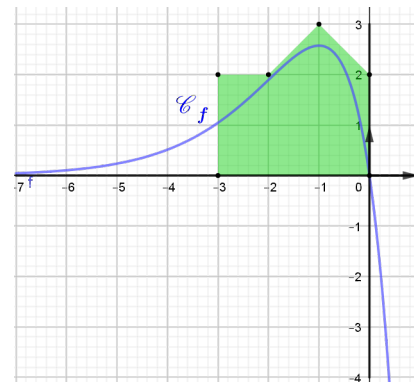


L'aire de ce polygone est égale à 4 U.A., l'aire de 2 carrés de coté 1 et l'aire de 2 triangles rectangles dont les longueurs des cotés de l'angle droit sont 2 et 1.

Conclusion :

$$4 < A$$

- Le polygone coloré en vert sur la figure suivante contient la partie colorée en jaune.



L'aire de ce polygone est égale à 7 U.A., l'aire de 6 carrés de coté 1 et l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur 1.

Conclusion

$$A < 7$$

• Conséquence

La seule réponse possible est $5 < A < 6$.

3. Réponse : **d** f'' change de signe en $x=-2$

Justification non demandée

- a : Réponse fautive car par lecture graphique, f est décroissante sur $\{-1;0\}$ donc sur cet intervalle f' est négative.
- b : Réponse fautive car sur $[-1;0]$, la courbe est en dessous de toutes ses tangentes donc f est concave sur cet intervalle.
- c : Réponse fautive car sur $[-1,5;0]$ f est concave donc la courbe n'admet pas de point d'inflexion sur cet intervalle.
- Conséquence : la réponse **d est vraie**.

• Remarque :

On peut aussi calculer $f''(x)$ et son signe.

$$f(x) = -7x e^x \quad f'(x) = -7e^x - 7x e^x = (-7x - 7)e^x \quad f''(x) = -7e^x + (-7x - 7)e^x = (-7x - 14)e^x$$

Le signe de $f''(x)$ est le signe du polynôme $-7x-14$ nul pour -2 en changeant de signe.

Partie B

On considère la loi normale X de paramètres $\mu=19$ et $\sigma=5$

Remarques préliminaires

- On peut répondre rapidement à toutes les questions en utilisant la calculatrice.
- On doit connaître ou retrouver les résultats suivants :
 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,68$ $P(\mu \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,34$ $P(\mu \leq X) = 0,5$ $P(\mu + \sigma \leq X) = 0,16$

4. Réponse : **a** 0,385

Justification non demandée

$$P(19 \leq X \leq 19+5) = P(19 \leq X \leq 24) < P(19 \leq X \leq 25) < P(19 \leq X)$$

donc $0,34 < P(19 \leq X \leq 25) < 0,5$ le seul résultat possible $P(19 \leq X \leq 25) = 0,385$.

5. Réponse : **b** 0,115

Justification non demandée

$$P(25 \leq X) < P(24 \leq X) = 0,16 \text{ le seul résultat possible } P(25 \leq X) = 0,115$$

6. Réponse : **c** 20

Justification non demandée

$$0,16 < 0,42 < 0,5 \text{ donc } P(24 \leq X) < P(k < X) < P(19 \leq X)$$

conséquence : $24 > k > 19$ le seul résultat possible $P(X > 20) = 0,42$.