Exercice 2 — 4 points

Un navigateur s'entraîne régulièrement dans le but de battre le record du monde de traversée de l'Atlantique à la voile.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.
Pour tous événements A et B, on note $\bar{A}$ l'événement contraire de A, P(A) la probabilité de A et si B est de probabilité non nulle, $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Partie A

Le navigateur décide de modéliser la durée de sa traversée en jour par une loi normale de paramètres $\mu=7$ et $\sigma=1$.

1. Quelle est la probabilité que le navigateur termine sa course entre 5 et 8 jours après le départ ?
2. Dans sa catégorie de voilier, le record du monde actuel est de 5 jours. Quelle est la probabilité que le navigateur batte le record du monde ?

Partie B

Une entreprise nommée « Régate », s'intéresse aux résultats de ce navigateur.
La probabilité qu'il réalise la traversée en moins de 6 jours est de 0,16.
Si le navigateur réalise la traversée en moins de 6 jours, l'entreprise le sponsorise avec une probabilité de 0,95.
Sinon, l'entreprise hésite et le sponsorise avec une probabilité de 0,50.
On note :
. M l'événement « la traversée est réalisée par le navigateur en moins de 6 jours » ;
. F l'événement « l'entreprise sponsorise le navigateur ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité que l'entreprise ne sponsorise pas le navigateur à la prochaine course est 0,428.
3. L'entreprise a finalement choisi de ne pas financer le navigateur.
Calculer la probabilité que la navigateur ait tout de même réalisé la traversée en moins de 6 jours.

Partie C

L'entreprise « Régate » sponsorise plusieurs catégories de sportifs dans le monde nautique.
Ces derniers doivent afficher le slogan « Avec Régate j'ai 97 % d'être sur le podium ! ».
L'étude des résultats sportifs de l'année a révélé que, parmi 280 sportifs de chez « Régate », 263 sont montés sur le podium. Que penser du slogan ?

CORRECTION

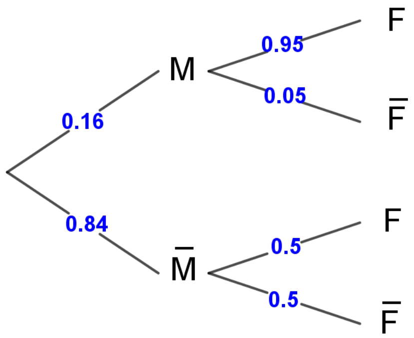
Partie A

On note D, la variable aléatoire égale à la durée en jours de la traversée, la loi de probabilité de D est la loi normale de paramètres $\mu=7$ et $\sigma=1$.

1. En utilisant la calculatrice, $P(5\leqslant D\leqslant 8)$ = **0,819.**
2. En utilisant la calculatrice, $P(D\leqslant 5)$ = **0,023.**

Partie B

1. La probabilité que le navigateur réalise la traversée en moins de 6 jours est 0,16.
   Donc $P(M)=0{,}16$ et $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}16=0{,}84$.
   Si le navigateur réalise la traversée en moins de 6 jours, alors l'entreprise le sponsorise avec une probabilité de 0,95.
   Donc $P_M(F)=0{,}95$ et $P_M(\bar{F})=1-P_M(F)=1-0{,}95=0{,}05$
   Sinon l'entreprise le sponsorise avec une probabilité de 0,50.
   Donc $P_{\bar{M}}=0{,}5$ et $P_{\bar{M}}(\bar{F})=1-P_{\bar{M}}(F)=1-0{,}5=0{,}5$.
   On obtient l'arbre pondéré :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :
   $P(\bar{F})=P(M\cap\bar{F})+P(\bar{M}\cap\bar{F})=P(M)\times P_M(\bar{F})+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(\bar{F})$ = $0{,}16\times 0{,}05+0{,}84\times 0{,}5=0{,}0080+0{,}42$
   $P(\bar{F})$ = **0,428.**

3. On nous demande de calculer $P_{\bar{F}}(M)$.
   $$P_{\bar{F}}(M)=\frac{P(\bar{F}\cap M)}{P(\bar{F})}=\frac{0{,}008}{0{,}428}=\frac{8}{428}=\frac{2}{107}$$ = **0,019.**

Partie C

On considère un échantillon de taille 280 parmi les sportifs sponsorisés par l'entreprise « Régate ».
L'entreprise affirme que chaque sportif à 97 % de chance d'être sur le podium donc la probabilité d'un sportif d'être sur le podium est p=0,97.
$n=280\geqslant 30$ et $np=280\times 0{,}97=271{,}6\geqslant 5$ et $n(1-p)=280\times 0{,}03=8{,}4\geqslant 5$.
On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique n au seuil de 95 %de la proportion de sportifs accédant au podium. $I=\left[0{,}97-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}97\times 0{,}03}{280}};0{,}97+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}97\times 0{,}03}{280}}\right]$.

En utilisant la calculatrice : $1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}97\times 0{,}03}{280}}=0{,}020$ à 10^{-3} près I=[0,95;0,99].

La proportion observée dans l'échantillon est $f=\frac{263}{280}$ = 0,939.

0,939 n'appartient pas à I donc **nous pouvons remettre en cause la validité de ce slogan au seuil de 95 %.**