Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % Par an. Pour réguler la population des loups le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.
On modélise la population par une suite (u_n) le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en 2017+n.

1.a. Avec ce modèle, vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 sera de 318.
1.b. Justifier que, pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1,12u_n-18$.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N ← 0
U ←300
Tant . . . faire
   U ← . . . .
   N ← . . .
Fin Tant que
```

3. On définit la suite (v_n) par : $v_n=u_n-150$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.
3.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12.
Préciser son terme initial.
3.b. Exprimer, pour tout n appartenant, v_n en fonction de n.
En déduire u_n en fonction de n.
3.c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?Justifier.
Que peut-on en déduire ?

4.a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
$150+1,12^n\times150 > 600$
4.b. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'énoncé.

5. En 2023, avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissante annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.
En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

CORRECTION

1.a. Pendant l'année 2018, le nombre de loups croit de 12 % soit $300\times\frac{12}{100}=36$ et 18 loups sont tués par les chasseurs donc le nombre de loups est : 300+36-18= **318.**

1.b. Pour tout entier naturel n, u_n est le nombre de loups en 2017+n et u_{n+1} est le nombre de loups l'année 2017+n+1.

Pendant l'année 2017+n+1, le nombre de loups croit de 12 % soit $u_n\times\frac{12}{100}=0{,}12\,u_n$ et 18 loups sont tués par les chasseurs donc le nombre de loups en 2017+n+1 est : $u_{n+1}=u_n+0{,}12\,u_n-18=1{,}12\,u_n-18$.

```
N ← 0
U ←300
Tant U < 600 faire
   U ← 1.12xU-18
   N ←  N+1
Fin Tant que
```

Remarque

On propose une programmation en utilisant le logiciel Python de cet algorithme.
On ajoute une instruction à l'algorithme en demandant d'afficher le nombre d'années nécessaires pour que le nombre de loups ait doublé.

Programme en Python *(non demandé)*

```
print('Début de programme')
N=0
U=300
while U<600:
    U=1.12*U-18
    N=N+1
print("N="+str(N))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
N=10
Fin de programme
```

Conclusion

Le nombre de loups en 2017+10=2027 aura doublé.

3. Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-150$ donc $v_n=u_n+150$

3.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-150=1{,}12\,u_n-18-150=1{,}12(v_n+150)-168 = 1{,}12\,v_n+168-168 = 1{,}12\,v_n$

(v_n) est donc une suite géométrique de $q=1{,}12$.

Son premier terme : $v_0=u_0-150=300-150=150$

3.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=150\times1{,}12^n$ et $u_n=v_n+150=150\times1{,}12^n+150$.

3.c. $1{,}12 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}12^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ..

Avec cette modélisation le nombre de loups va croître indéfiniment.

4.a. $150\times 1{,}12^n+150 > 600 \Leftrightarrow 150\times 1{,}12^n > 600-150=450$

$150>0$

$\Leftrightarrow \quad 1{,}12^n > \frac{450}{150}=3$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(1{,}12^n) > \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad n\times\ln(1{,}12) > \ln(3)$

$1{,}12>1$ donc $\ln(1{,}12)>0$

$n > \frac{\ln(3)}{\ln(1{,}12)}=9{,}69$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 10$.

4.b. **2017+10=2027 est la première année pour laquelle le nombre de loups aura doublé.**

5. À partir de 2023, pour tout entier naturel n, on note w_n le nombre de loups de l'année 2023+n.

$w_0=446$ et pour tout entier naturel n $w_{n+1}=1{,}12\,w_n-35$.

Pour déterminer l'année por laquelle la population de loups dépassera 600 on peut considérer un nouvel algorithme que l'on pourra l' utiliser boucle par boucle.

Ici on donne directement un programmation en Python de l'algorithme en demandant d'afficher le nombre de loups chaque (ou chaque boucle).

Programme en Python

```
print('Début de programme')
N=0
U=446                   #nombre de loups en 2023
while U<600:
    U=1.12*U-35
    N=N+1
    A=2023+N            # année considérée dans la boucle
    W=round(U)          # nombre de loups en l'année A (arrondi de U à l'unité
    print("En "+str(A),"le nombre de loups sera",str(W))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
En 2024 le nombre de loups sera 465
En 2025 le nombre de loups sera 485
En 2026 le nombre de loups sera 508
En 2027 le nombre de loups sera 535
En 2028 le nombre de loups sera 564
En 2029 le nombre de loups sera 596
En 2030 le nombre de loups sera 633
Fin de programme
```

Conclusion

Avec la nouvelle modélisation 2030 est la première année pou laquelle le nombre de loups sera supérieur à 600.