Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour la nouvelle année,Lisa prend la bonne résolution d'aller au travail tous les matins à vélo. Le premier jour, très motivée, Lisa se rend au travail à vélo. Par a suite, elle se rend toujours au travail à vélo ou en voiture.

Elle se rend compte que :
. si elle a pris son vélo un jour, cela renforce sa motivation et elle reprend le vélo le lendemain avec une probabilité de 0,7 ;
. si elle a pris sa voiture un jour, la probabilité qu'elle reprenne la voiture le lendemain est de 0,5.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets A et B où :
. A est l'événement « Lisa prend le vélo » ;
. B est l'événement « Lisa prend la voiture ».

On note, pour tout entier naturel n non nul :
. a_n la probabilité que Lisa aille au travail à vélo le jour n ;
. b_n la probabilité que Lisa aille au travail en voiture le jour n.

1.a. Traduire les données par un graphe probabiliste.
1.b. Déduire la matrice de transition M.

2.a. Donner les valeurs a_1 et b_1 correspondant à l'état initial.
2.b. Calculer la probabilité arrondie au centième que Lisa prenne le vélo le $8^{\text{ème}}$ jour.

3. Déterminer l'état stable du graphe puis interpréter le résultat obtenu.

4.a. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n : $a_{n+1}=0,7\,a_n+0,5\,b_n$.
4.b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n : $a_{n+1}=0,2\,a_n+0,5$.

5.a. Recopier et compléter l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n < 0,626$.

```
N ← 1
A ← 1
Tant que . . . faire
   A ← . . .
   N ← . . .
Fin Tant qe
```

5.b. Quelle est la valeur de N après exécution de l'algorithme ?
Interpréter le résultat.

CORRECTION

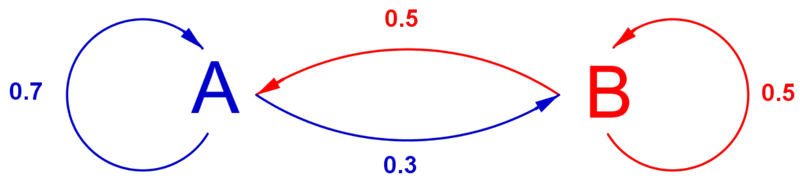
1.a. On note :

A l'état « Lisa prend le vélo »

B l'état « Lisa prend la voiture »

A et B sont les deux sommets de l'arbre probabiliste.

- Si Lisa prend son vélo un jour, elle reprend le lendemain avec une probabilité de 0,7 donc elle prend la voiture avec une probabilité de 1-0,7=0,3.
  Conséquences
  Le poids de l'arête AA est : 0,7
  Le poids de l'arête AB est : 0,3
- Si lisa prend sa voiture un jour ; la probabilité qu'elle reprenne la voiture le lendemain est 0,5 donc la Probabilité qu'elle prenne le vélo le lendemain est 1-0,5=0,5.
  Conséquences
  Le poids de l'arête BB est : 0,5
  Le poids de l'arête BA est : 0,5
- On obtient le gaphe probabiliste :



1.b. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.

Dans cet exercice on utilisera les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe probabiliste est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,7

m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,3

m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,5

m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,5

$M=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

2.a. Le premier jour Lisa prend son vélo donc $a_1=1$ et $b_1=0$.

2.b. Pour tout entier naturel n non nul,

$(a_n \quad b_n)=(a_1 \quad b_1)\ M^{n-1}$

donc $(a_8 \quad b_8)=(1 \quad 0)\ M^7$

On détermine M^7 en utilisant la calculatrice.

On arrondit au centtième les coefficients de la matrice.

On obtient : $M^7=\begin{pmatrix} 0,63 & 0,37 \\ 0,62 & 0,38 \end{pmatrix}$

$(a_8 \quad b_8)=(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,63 & 0,37 \\ 0,62 & 0,38 \end{pmatrix}=(0,63 \quad 0,37)$ et $a_1=0,63$.

3. $(x \quad y)$ est l'état stable du graphe si et seulement si $(x \quad y)\,M=(x \quad y)$ et x+y=1.

$(x \quad y)\,M=(x \quad y)\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}=(0,7\,x+0,5\,y \quad 0,3\,x+0,5\,y)$

$(x \quad y)\,M=(x \quad y) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,7\,x+0,5\,y \\ y=0,3\,x+0,5\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3\,x=0,5\,y \\ 0,3\,x=0,5\,y \end{cases} \Leftrightarrow \{3\,x=5\,y$

$x+y=1$ donc 3x=5(1-x) $\Leftrightarrow$ 8x=5 donc $x=\frac{5}{8}=0{,}625$ et $y=\frac{3}{8}=0{,}375$

L'état stable est $\begin{pmatrix}\frac{5}{8} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}625 & 0{,}375\end{pmatrix}$

À long terme, la probabilité que Lisa prenne le vélo un jour est 0,625 et la probabilité qu'elle prenne la voiture est 0,375.

4.a. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}M=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7\,a_n+0{,}5\,b_n & 0{,}3\,a_n+0{,}5\,b_n\end{pmatrix}$$

donc $a_{n+1}=0{,}7\,a_n+0{,}5\,b_n$.

4.b. Pour tout entier naturel n : $a_n+b_n=1$ donc $a_{n+1}=0{,}7\,a_n+0{,}5(1-a_n)=0{,}2\,a_n+0{,}5$.

5.a.

```
N ← 1
A ← 1
Tant que A>0.626 faire
   A ← 0.2xA+0.5
   N ← N+1
Fin Tant qe
```

5.b. En utilisant la calculatrice, on calcule les résultats boucle par boucle.
On donne les résultats sous la forme d'un tableau.

N	1	2	3	4	5
A	1	0.7	0.64	0.628	0.6256
A >0.626	oui	oui	oui	oui	non

Au bout de 5 jours la probabilité que Lisa aille en vélo au travail est inférieure à 0,626.

Remarque

On utilise le logiciel Python pour programmer l'algorithme donné.
On ajoute les instructions pour afficher les valeurs de N et de A.

Programme en Python

```
print('Début de progamme')
N=1
A=1
while A>0.626:
    A=0.2*A+0.5
    N=N+1
    print("N="+str(N),"A="+str(A))
```

Exécution

```
Début de progamme
N=2 A=0.7
N=3 A=0.64
N=4 A=0.628
N=5 A=0.6256
Fin de programme
```