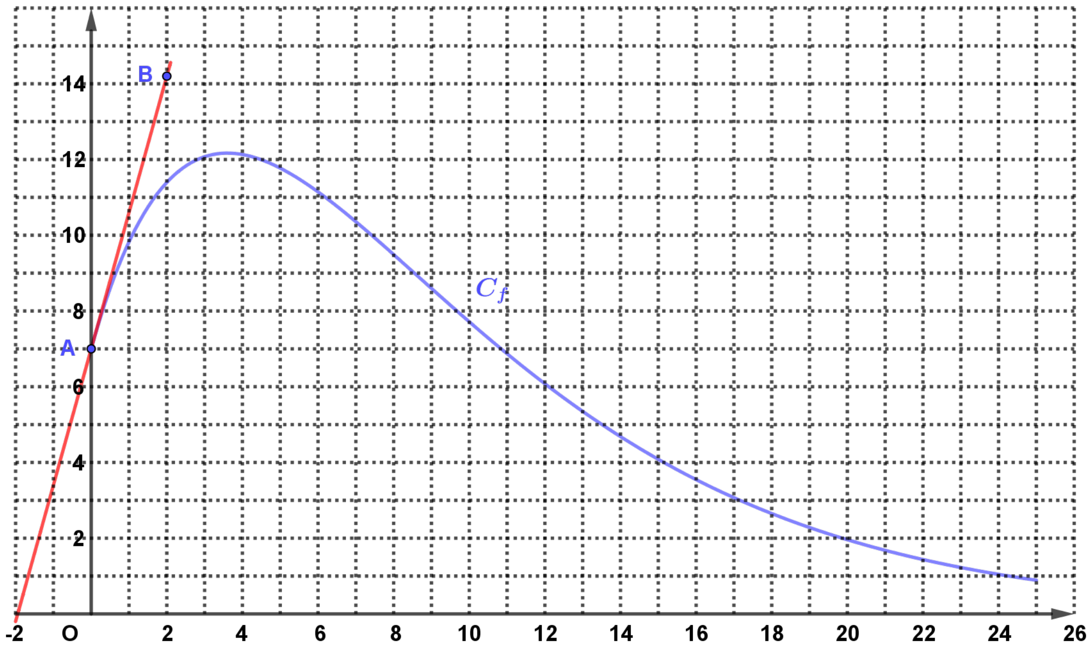
Exercice 4 — 6 points

Partie A

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur [0;25] par : $f(x)=(ax+b)e^{-0,2x}$ où a et b sont deux nombres réels.
On a représenté également la tangente T au point A(0;7). T passe par le point B(2;14,2).



1. Résoudre graphiquement l'équation f(x)=6.

2.a. Déterminer, par le calcul le coefficient directeur de la la droite T.
2.b. Exprimer, pour tout $x\in[0;25]$ $f'(x)$ en fonction de a et b.
2.c. Montrer que a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} a-0,2b=3,6 \\ b=7 \end{cases}$$

En déduire la valeur de a.

Partie B

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur [0;25] par : $f(x)=(5x+7)e^{-0,2x}$.
Justifier.

2. Montrer que l'équation f(x)=6 admet une unique solution α sur l'intervalle [0;25].
Donner une valeur approchée au dixième de α.

3. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant.

$\boldsymbol{Dériver((-25x-160)e^{-0.2x})}$
$\boldsymbol{(5x+7)e^{-0.2x}}$

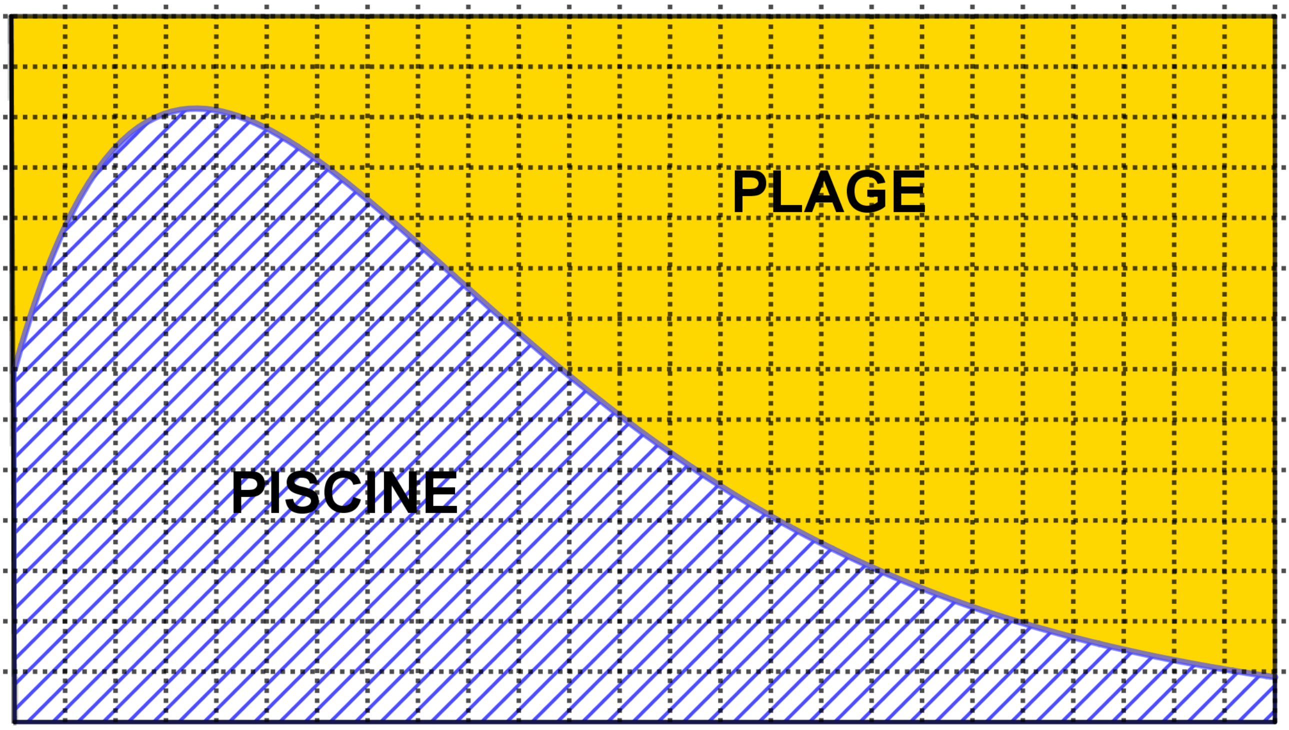
Exploiter ce résultat pour donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième de :
$\int_0^{25} f(x)\,dx$.

Partie C

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable. Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
La bordure est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie précédente.

1. Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine?

2. L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.
Quelle sera la largeur arrondie au dixième de mètre ?



CORRECTION

Partie A

1. La droite d'équation $y=6$ coupe la courbe représentative de f en un seul point d'abscisse : 12 obtenue par lecture graphique.
L'équation $f(x)=6$ admet une unique solution : **12.**

2.a. T est la droite (AB) A(0;7) et B(2;14,2).

Le coefficient directeur de T est : $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{14,2-7}{2-0}=\dfrac{7,2}{2}=$ **3,6.**

2.b. $(e^{-0,2x})'=-0,2e^{-0,2x}$ $\quad (ax+b)'=a$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;25] :

$f'(x)=ae^{-0,2x}+(ax+b)(-0,2e^{-0,2x})=(a-0,2ax-0,2b)e^{-0,2x}=(-0,2ax+a-0,2b)e^{-0,2x}$

2.c. $f(0)=be^0=b=7$

$f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T.

$f'(0)=(a-0,2b)e^0=a-0,2b=3,6$.

Donc a et b sont solution du système :

$$\begin{cases} a-0,2b=3,6 \\ \quad\quad b=7 \end{cases}$$

On obtient : $a-0,2\times7=3,6 \quad \Leftrightarrow \quad a=3,6+1,4=$ **5.**

Et pour tout nombre réel x de [0;25] $f(x)=(5x+7)e^{-0,2x}$

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de [0;25] :

$f'(x)=(-0,2\times5x+5-0,2\times7)e^{-0,2x}=(-x+3,6)e^{-0,2x}$

Si $0 \leqslant x < 3,6$ alors $f'(x) > 0$ et f est croissante sur [0;3,6]

Si $x=0$ alors $f'(x)=0$

Si $3,6 < x \leqslant 25$ alors $f'(x) < 0$ et f est décroissante sur [3,6;25]

On donne le tableau de variation de f.

x	0		3.6		25
f '(x)					
f(x)	7	↗	M	↘	m

$M=f(3,6)=25e^{-0,72}=12,17$ à 10^{-2} près.

$m=f(25)=132e^{-5}=0,89$ à 10^{-2} près.

2. f est strictement croissante sur [0;3,6] et $f(0)=7 > 6$ donc l'équation $f(x)=6$ n'admet pas de solution sur [0;3,6].

. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [3,6;25] et 6 appartient à [f(25);f(3,6)] = [m;M] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x) = 6 admet une unique solution α appartenant à [3,6;25].

. Conclusion

L'équation $f(x)=6$ admet une unique solution α appartenant à [0;25].

En utilisant la calculatrice :

$f(12,1)=(60,5+7)e^{-2,42}=67,5e^{-2,42}=6,002$ à 10^{-3} près

$f(12,2)=(61+7)e^{-2,44}=68e^{-2,44}=0,927$ à 10^{-3} près.

Donc $12{,}1 < \alpha < 12{,}2$.
12,1 est une valeur approchée de α au dixième près.

3. Le logiciel de calcul formel nous précise que la fonction F définie sur [0;25] par :
$F(x)=(-25x-160)e^{-0{,}2x}$ est une primitive de f sur [0;25].
Donc $\int_0^{25} f(x)\,dx = F(25) - F(0) = (-25\times25-160)e^{-5}-(-160)e^{0} = 160-785e^{-5} =$ **154,711** à 10^{-3} près.

Partie C

1. f est continue et positive sur [0;25] donc l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations x=0 et x=25 est égale à $\int_0^{25} f(x)\,dx$.
Ici l'unité de longueur est le mètre et l'unité d'aire est le m^2 .
<u>Conclusion</u>
L'aire de la piscine est 154,711 m^2 à 10^{-3} près.

2. La largeur du rectangle est égale à la valeur moyenne de la fonction f sur [0,25].
$\mu=\frac{1}{25-0}\int_0^{25} f(x)\,dx = \frac{154{,}711}{25} =$ **6,2 m** à 10^{-2} près.