Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour sans débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit.
Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2000 kg.
On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours; ainsi $a_0=2000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est de 1878,8 kg.

2. On affirme que pour tout entier n, $a_{n+1}=1{,}02\,a_n-100$.
2.a. Justifier à l'aide de l'énoncé la relation précédente
2.b. On considère la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n par : $b_n=a_n-5000$.
Démontrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser son premier terme b_0 et sa raison.
2.c. En déduire pour tout entier naturel n, une expression de (b_n) en fonction de n, puis montrer que : $a_n=5000-3000\times 1{,}02^n$.
2.d. En déterminant la limite de la suite (a_n) , justifier que les algues finissent par disparaître.

3.a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine le nombre de jours nécessaire à la disparition des algues.

```
N ← 0
A ← 2000
Tant que . . .
   A ← . . .
   N ← N+1
Fin Tant que
Afficher . . .
```

3.b. Quel est le résultat renvoyé par l'algorithme ?

4.a. Résoudre par le calcul l'inéquation $5000-3000\times 1{,}02^n \leqslant 0$
4.b. Quel résultat précédemment obtenu retrouve-t-on ?

CORRECTION

1. $a_0 = 2000$

Le premier jour, la journée la masse d'algues augmente de 2 % soit $2000 \times \frac{2}{100} = 40$ kg, la nuit avec la filtration la masse d'algue de 100 kg donc $a_1 = 2000 + 40 - 100 = 1940$ kg .

le deuxième jour, la journée la masse d'algues augmente de 2 % soit $1940 \times \frac{2}{100} = 38{,}8$ kg , la nuit avec la filtration la masse diminue de 100 kg donc $a_2 = 1940 + 38{,}8 - 100$ = **1878,8 kg.**

2.a. a_n est la masse d'algues en kg dans l'étang le $n^{\text{ième}}$ jour (après la filtration).
a_{n+1} est la masse d'algues en kg dans l'étang le $(n+1)^{\text{ième}}$ jour (après la filtration).
Le $(n+1)^{\text{ième}}$ jour, au début de la journée, la masse d'algues de l'étang est a_n kg, pendant la journée la masse d'algues augmente de 2 % soit $a_n \times \frac{2}{100} = 0{,}02\,a_n$ et la nuit après la filtration la masse diminue de 100 kg donc $a_{n+1} = a_n + 0{,}02\,a_n - 100 = 1{,}02 \times a_n - 100$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $b_n = a_n - 5000$ donc $a_n = 5000 + b_n$
$b_{n+1} = a_{n+1} - 5000 = 1{,}02\,a_n - 100 - 5000 = 1{,}02\,(5000 + b_n) - 5100 = 5100 + 1{,}02\,b_n - 5100$
$b_{n+1} = 1{,}02\,b_n$
$b_0 = a_0 - 5000 = 2000 - 5000 = -3000$.
La suite (b_n) est la suite géométrique de premier terme b_0 = -3000 et de raison q = 1,02.

2.c. Pour tout entier naturel n :
$b_n = b_0 \times q^n = -3000 \times 1{,}02^n$
$a_n = 5000 + b_n = 5000 - 3000 \times 1{,}02^n$.

2.d. $1{,}02 > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 1{,}02^n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} -3000\,b_n = -\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} 5000 - 3000\,b_n = -\infty$.
Il existera une valeur de n telle que $5000 - 3000\,b_n < 0$ et **les algues finiront par disparaître.**

3.a. On complète l'algorithme proposé :

```
N ← 0
A ← 2000
Tant que A ≥ 0
   A ← 1.02xA-100
   N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

3.b. Si on est capable de programmer la calculatrice et que l'on exécute le programme, on obtient **26.**
Sinon par balayage à la calculatrice, on obtient $a_{25} = 78{,}2 > 0$ et $a_{26} = -20{,}3 < 0$.
Nous proposons l'utilisation du logiciel Python (non demandé).
Programme

```
print('Début de programme')
N=0
A=2000
while A>=0:
    A=1.02*A-100
    N=N+1
print("N="+str(N))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
==== RESTART: C:\Use:
Début de programme
N=26
Fin de programme
```

4.a. $5000-3000\times 1{,}02^n \leqslant 0 \iff 5000 \leqslant 3000\times 1{,}02^n \iff \dfrac{5000}{3000} \leqslant 1{,}02^n \iff \dfrac{5}{3} \leqslant 1{,}02^n$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\iff \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \leqslant \ln\left(1{,}02^n\right) \iff \ln(5)-\ln(3) \leqslant n\times\ln(1{,}02)$

$1{,}02 > 1$ donc $\ln(1{,}02) > 0$

$\iff \dfrac{\ln(5)-\ln(3)}{\ln(1{,}02)} \leqslant n$

Or $\dfrac{\ln(5)-\ln(3)}{\ln(1{,}02)}=25{,}8$ à 10^{-1} près et n est un entier naturel.

$\iff 26 \leqslant n$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est des entiers naturels supérieurs ou égal à 26.

4.b. 26 est la plus petite valeur de n telle que $5000-3000\times 1{,}02^n \leqslant 0$ donc **au bout de 26 jours les algues disparues de l'étang.**