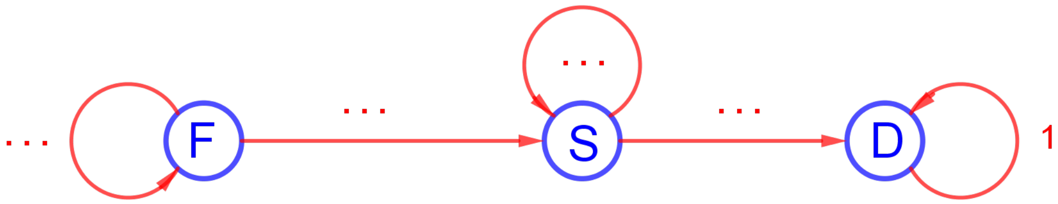
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance.
Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants :
- fonctionnel (F) ;
- en sursis (S) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ;
- défaillant (D) s'il ne fonctionne plus.

La société a observé que d'un jour sur l'autre :
- concernant les automates fonctionnels, 90 % le restent et 10 % deviennent en sursis ;
- concernant les automates en sursis 80 % le restent et 20 % deviennent défaillants.

1.a. Reproduire et compléter le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



1.b. Interpréter le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe.

1.c. Voici la matrice de transition $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0 & 0,8 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre E, S, D.
Préciser la signification du coefficient 0,2 dans cette matrice.

2. À compter d'une certaine date, la société relève chaque à midi l'état de ses automates.
On note ainsi pour tout entier naturel n :
- f_n la probabilité qu'un automate soit fonctionnel le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- s_n la probabilité qu'un automate soit en sursis le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- d_n la probabilité qu'un automate soit défaillant le $n^{\text{ième}}$ jour.

On note alors $P_n = \begin{pmatrix}f_n & s_n & d_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste le $n^{\text{ième}}$ jour.
Enfin, la société onserve qu'au début de l'espérience tous ses automates sont fonctionnels :
on a donc $P_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2.a. Calculer P_1.

2.b. Montrer que , le $3^{\text{ème}}$ jour, létat probabiliste est $\begin{pmatrix}0,729 & 0,317 & 0,054\end{pmatrix}$.

2.c. Vérifier que ce graphe possède un unique état stable $P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Quelle est la signification de ce résultat pour la situation étudiée ?

3.a. Justifier, que pour tout entier naturel n, $s_{n+1}=0,1\,f_n+0,8\,s_n$.

3.b. On vérifierait de même que pour tout entier naturel n,
$d_{n+1}=0,2\,s_n+d_n$ et $f_{n+1}=0,9\,f_n$
Compléter l'algorithme ci-après de sorte qu'il affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← . . .
F ← 1
N ←0
Tant que . . .
   D ← 0.2xS+D
   S ← 0.1xF+0.8xS
   F ← 0.9xF
   N ←  . . .
Fin Tant Que
Afficher . . .
```

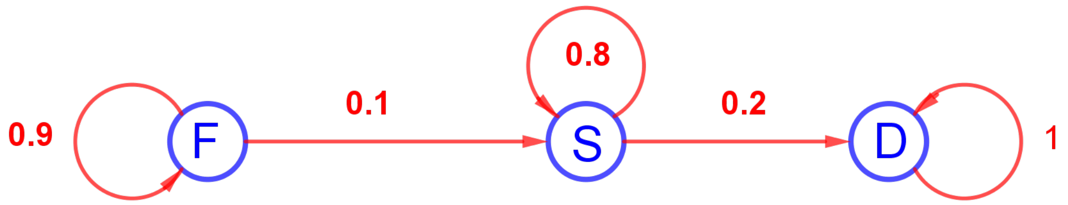
3.c. Au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient-elle supérieure à 30 %?

3.d. Dans le codage de la boucle « Tant que », l'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ? Justifier.

CORRECTION

1.a. Le graphe considéré est un graphe orienté.
L'énoncé précise :

- « concernant les automates fonctionnels, 90 % restent et 10 % deviennent en sursis »
  Conséquences
  Le poids de l'arête FF est égal à 0,9.
  Le poids de l'arête FS est égal à 0,1.
- « concernant les automates en sursis, 80 % le restent et 20 % deviennent défaillants »
  Conséquences
  Le poids de l'arête SS est égal à 0,8.
  Le poids de l'arête SD est égal à 0,2.
- On obtient le graphe probabiliste suivant :



1.b. Lorsqu'un automate est défaillant un jour, il reste défaillant le lendemain donc le poids de l'arête DD est égal à 1.

1.c. La matrice de transition associée au graphe est $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0 & 0,8 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

L'ordre des sommets est F, S et D et dans cet exercice on utilise les matrices lignes.
0,2 est le poids de l'arête SD c'est à dire la probabilité qu'un automate en sursis un jour soit défaillant le lendemain.

2.a. $P_1=P_0M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0 & 0,8 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix}1\times 0,9+0\times 0+0\times 0 & 1\times 0,1+0\times 0,8+0\times 0 & 0\times 0+0\times 0,2+0\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\end{pmatrix}$

2.b. $P_2=P_1M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0 & 0,8 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,81 & 0,09+0,08 & 0,02\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,81 & 0,17 & 0,02\end{pmatrix}$

$P_3=P_2M=\begin{pmatrix}0,81 & 0,17 & 0,02\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0 & 0,8 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,729 & 0,081+0,136 & 0,034+0,02\end{pmatrix}$

$P_3=\begin{pmatrix}0,729 & 0,217 & 0,054\end{pmatrix}$

2.c. $P=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ est un état stable $\Leftrightarrow$ $(PM=P$ et $x+y+z=1)$

$PM=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,1 & 0\\ 0 & 0,8 & 0,2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9x & 0,1x+0,8y & 0,2y+z\end{pmatrix}$

$PM=P \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}0,9x=x\\ 0,1x+0,y=y\\ 0,2y+z=z\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=0\\ y=0\\ 0\times z=0\end{cases}$

D'autre part $x+y+z=1$ donc $z=1$

Conclusion
$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est l'unique état stable du système.

Cet état stable correspond au cas où tous les automates sont défaillants.

3.a. Pour tout entier naturel n, $P_{n+1}=P_n M$

$P_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & s_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}$ $\qquad P_n = \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix}$

$$P_n M = \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 f_n & 0,1 f_n + 0,8 s_n & 0,2 s_n + d_n \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1}=P_n M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_{n+1} = 0,9 f_n \\ s_{n+1} = 0,1 f_n + 0,8 s_n \\ d_{n+1} = 0,2 s_n + d_n \end{cases}$$

3.b. On complète l'algorithme donné.

```
D ← 0
S ← 0
F ← 1
N ←0
Tant que D < 0.30
   D ← 0.2xS+D
   S ← 0.1xF+0.8xS
   F ← 0.9xF
   N ← N+1
Fin Tant Que
Afficher N
```

3.c. Pour tout entier naturel n :

$P_n = \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix} = P_0 M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^n$

d_n est le premier coefficient de la $3^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M^n .

On calcule les puissances de M avec la calculatrice

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_1 = 0$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,17 & 0,02 \\ 0 & 0,64 & 0,36 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_2 = 0,02$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0,729 & 0,217 & 0,054 \\ 0 & 0,512 & 0,488 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_3 = 0,054$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0,6561 & 0,2465 & 0,0974 \\ 0 & 40,96 & 0,5904 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_4 = 0,0974$$

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0,59049 & 0,26281 & 0,1467 \\ 0 & 0,32768 & 0,67232 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_5 = 0,1467$$

$$M^6 = \begin{pmatrix} 0,531441 & 0,269297 & 0,199262 \\ 0 & 0,262144 & 0,737856 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_6 = 0,199262$$

$$M^7 = \begin{pmatrix} 0,4782969 & 0,2685817 & 0,2531214 \\ 0 & 0,2097152 & 0,7902848 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_7 = 0,2531214$$

$$M^8 = \begin{pmatrix} 0,43046721 & 0,26269505 & 0,30683774 \\ 0 & 0,16777216 & 0,83222784 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d_8 = \mathbf{0,30683774.}$$

Conclusion

Au bout de 8 jours la proportion d'automates défaillants deviendra supérieure à 30 %.
(Il n'est pas nécessaire d'écrire toutes les matrices, il suffit de donner les coefficients d_n)

On peut aussi utiliser le logiciel Python pour programmer l'algorithme.
On ajoute une instruction au programme pour obtenir les coefficients d_n .
Programme (non demandé)

```
print('Début de programme')
D=0
S=0
F=1
N=0
while D<0.30:
    D=0.2*S+D
    S=0.1*F+0.8*S
    F=0.9*F
    N=N+1
    print("D="+str(D))
print("N="+str(N))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
D=0.0
D=0.020000000000000004
D=0.05400000000000001
D=0.09740000000000003
D=0.14670000000000005
D=0.19926200000000005
D=0.25312140000000005
D=0.3068377400000001
N=8
Fin de programme
```

3.d. L'ordre d'affectation des variables D, S et F est très important.
Par exemple si on choisit ; $S \leftarrow 0,1\times F+0,8\times S$
$D \leftarrow 0,2\times S+D$
$F \leftarrow 0,9\times F$
Pour calculer la valeur affectée à D on utilise la valeur affectée à S de l'instruction précédente et non celle de la boucle précédente.
Pour d_2 on obtient
$d_2=0,2\times 0,17+0=0,034$ et non 0,02.