

Exercice 3

5 points

Une entreprise dispose d'un stock de guirlandes électriques. On sait que 40 % des guirlandes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.

Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du fournisseur B peuvent être utilisées uniquement en intérieur pour des raisons de sécurité. Les autres guirlandes peuvent être utilisées aussi bien en intérieur qu'en extérieur.

1. On choisit au hasard une guirlande dans le stock.
 - . On note A l'événement « la guirlande provient du fournisseur A » et B l'événement « la guirlande provient du fournisseur B ».
 - . On note I l'événement « la guirlande peut être utilisée uniquement en intérieur ».
- 1.a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 1.b. Montrer que la probabilité $P(I)$ de l'événement I est 0,3.
- 1.c. On choisit une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur.

Le responsable de l'entreprise estime qu'il y a autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.

Le responsable a-t-il raison ? Justifier.
2. Une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur est vendue 5€ et une guirlande pouvant être utilisée uniquement est vendue 3€.

Calculer le prix moyen d'une guirlande prélevée au hasard dans le stock.
3. Lors d'un contrôle qualité, on prélève au hasard 50 guirlandes dans le stock. Le stock est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On admet que la proportion que la proportion de guirlandes défectueuses est égale à 0,02.

Calculer la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse. Arrondir à 10^{-3} .
4. L'entreprise souhaite connaître l'opinion de ses clients quant à la qualité de ses guirlandes électriques. Pour cela elle souhaite obtenir, à partir d'un échantillon aléatoire une estimation de la proportion de clients satisfaits au niveau de confiance de 95 % à l'aide d'un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 5 %.

Combien l'entreprise doit-elle interroger de clients au minimum ?

CORRECTION

1.a. L'énoncé précise :

- « 40 % des guirlandes proviennent du fournisseur A et le reste du fournisseur B »

Conséquences

$$B = \bar{A}$$

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

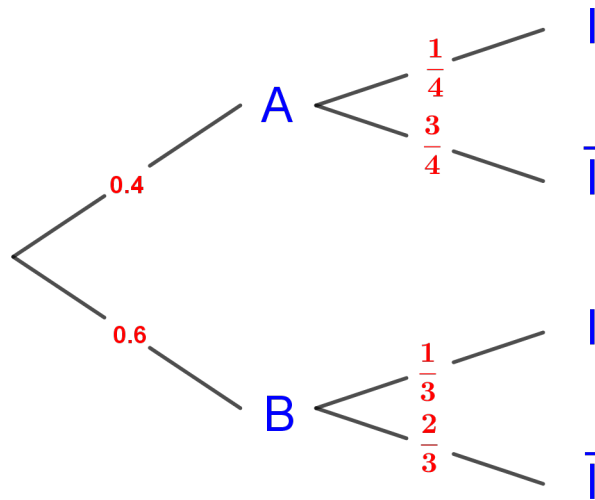
- « Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du producteur B peuvent être utilisées uniquement à l'intérieur ».

Conséquences

$$P_A(I) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_A(\bar{I}) = \frac{3}{4}$$

$$P_B(I) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_B(\bar{I}) = \frac{2}{3}$$

- On obtient pour arbre pondéré :



1.b. En utilisant l'arbre pondéré et la formule des probabilités totales.

$$P(I) = P(A \cap I) + P(B \cap I) = P(A) \times P_A(I) + P(B) \times P_B(I) = 0,4 \times \frac{1}{4} + 0,6 \times \frac{1}{3}$$

$$P(I) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

1.c. $P(\bar{I}) = 1 - 0,3 = 0,7$

$$P_{\bar{I}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} \quad P(A \cap \bar{I}) = P(A) \times P_A(\bar{I}) = 0,4 \times \frac{3}{4} = 0,3$$

$$P_{\bar{I}}(A) = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7} \quad \text{donc} \quad P_{\bar{I}}(B) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{3}{7} \neq \frac{4}{7} \quad \text{donc} \quad \text{Le responsable n'a pas raison.}$$

2. La valeur moyenne d'une guirlande prélevée dans le stock est :

$$m = 3 \times P(I) + 5 \times P(\bar{I}) = 3 \times 0,3 + 5 \times 0,7 = 0,9 + 3,5 = 4,4\text{€}.$$

3. On considère l'épreuve de Bernoulli :

On prélève au hasard une guirlande du stock.

Succès S : « la guirlande est défectueuse » Probabilité de succès $p = 0,02$

Echec \bar{S} : « la guirlande n'est pas défectueuse » Probabilité de l'échec $q = 1 - 0,02 = 0,98$

Le prélèvement des 50 guirlandes est assimilé à un prélèvement aléatoire avec remise.

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 50 épreuves est la loi

binomiale de paramètres 50 et 0,02.

E est l'événement : « au moins une guirlande est défectueuse » ;

\bar{E} est l'événement : « les 50 guirlandes ne sont pas défectueuses ».

$P(\bar{E}) = q^{50} = 0,98^{50} = 0,364$ à 10^{-3} près.

$P(E) = 1 - 0,364 = 0,636$.

4. Si n est la taille de l'échantillon alors l'amplitude de l'intervalle de confiance de 95 % est égale à : $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On veut que $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq 0,08$

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \frac{1}{0,08} \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \frac{2}{0,08} = 25$$

La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow 625 \leq n$$

L'entreprise doit interroger au moins 625 personnes.