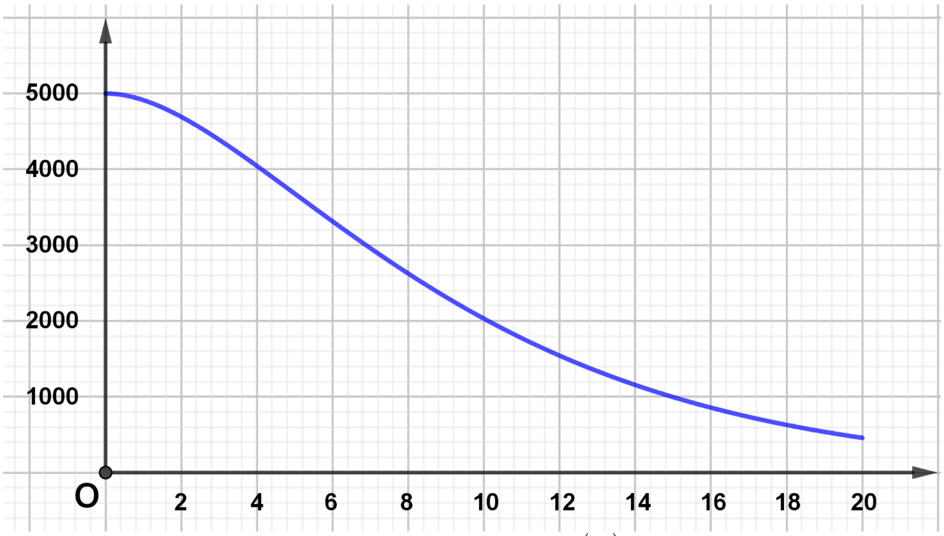
## Exercice 4 6 points

### Partie A : Étude graphique

On a représenté sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.




**1.** Résoudre graphiquement et de façon approchée l'équation $f(x)=3000$ .

**2.** Donner graphiquement une valeur approchée de l'intégrale de $f$ entre 2 et 8 à une unité d'aire près. Justifier la démarche.

### Partie B : Étude théorique

**1.** On note $f'$ la dérivée de la fonction f sur [0;20].
Démontrer que pour tout x de [0;20], $f'(x)=-200\,x\,e^{-0,2\,x}$ .

**2.** En déduire le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle [0;20].
Si nécessaire , arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.

**3.** Démontrer que l'équation $f(x)=3000$ admet une unique solution $\alpha$ sur [0;20], puis en donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près à l'aide de la calculatrice.

**4.** On admet que la fonction F définie sur l'intervalle [0;20] par l'expression $F(x)=-5000(x+10)e^{-0,2\,x}$ est une primitive de la fonction f sur [0;20].
Calculer $\int_2^8 f(x)\,dx$ . On donnera la valeur exercice, puis la valeur arrondie à l'unité.

### Partie C : Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle [0;20] par la fonction f étudiée dans les parties A et B.
Le nombre f(x) représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.
Utiliser les résultats de la partie B afin de répondre aux questions suivantes :

**1.** En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à 3000 objets ?

**2.** Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle [2;8]. Interpréter ce résultat.

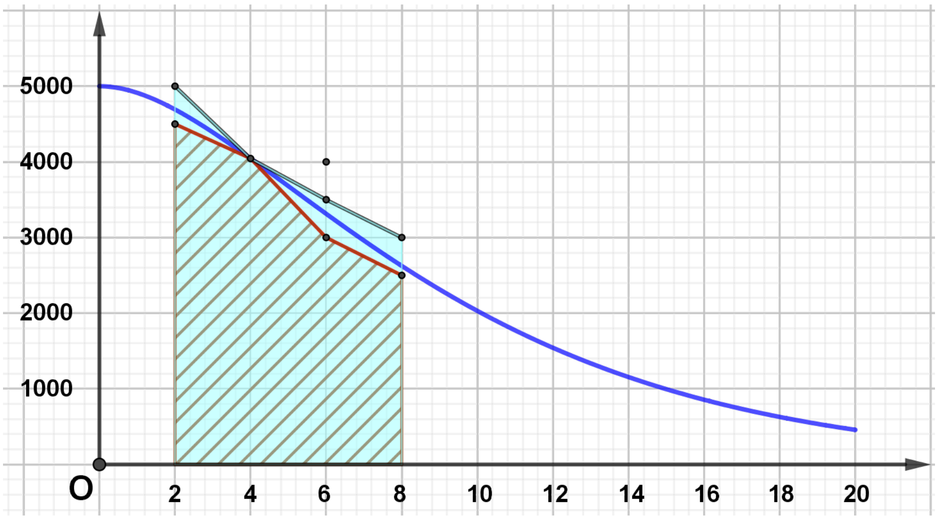
 

**CORRECTION**

**Partie A- Étude graphique**

1. On lit l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation et de la courbe représentative de f.
On obtient : **6,8**

2. $\int_2^8 f(x)\,dx$ est l'aire en unités d'aire du domaine plan compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=2 et x=8.
L'unité d'aire est l'aire d'un carré (grand) du quadrillage.
On construit deux polygones l'un contenu dans le domaine précédemment défini et l'autre contenant le domaine.
Pour cela, on considère les points de coordonnées respectives : (2;4500) ; (6;3500) et (8;2500) qui sont des milieux de côtés de carrés.




L'aire du polygone (hachuré en rouge) contenu dans le domaine défini précédemment est la somme des aires de trois trapèzes : (4+0,25) + (3+0,5) + (2+0,75) = 10,5 U.A.
L'aire du polygone (coloré en vert) contenant le domaine est la somme des aires de trois trapèzes : (4+0,5) + (3+0,75) + (3+0,25)= 11,5 U.A.
**Une valeur approchée de l'aire du domaine (donc de l'intégrale) est 11 U.A. (à 1 U.A. près).**
Remarque
L'unité d'aire est égale : 2x1000 = 2000.

**Partie B-Étude théorique**

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;20], $f(x)=1000(x+5)e^{-0,2x}$
$(e^u)'=u'e^u \quad (e^{-0,2x})'=-0,2e^{-0,2x}$ et $(x+5)'=1$
On dérive un produit :
$f'(x)=1000\times1\times e^{-0,2x}+1000\times(x+5)\times(-0,2e^{-0,2x})=1000e^{-0,2x}-0,2\times1000\times(x+5)e^{-0,2x}$
$f'(x)=1000e^{-0,2x}-200xe^{-0,2x}-1000e^{-0,2x}=-200xe^{-0,2x}$ .

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;20], $e^{-0,2x}>0$ et $-200x\leqslant0$ donc $f'(x)\leqslant0$ .
Conclusion
**f est décroissante sur [0;20]**

f(0)=5000 $\quad f(20)=25000e^{-4}=458$ à l'unité près.

Tableau de variation

| x | 0 | | 20 |
|---|---|---|---|
| f '(x) | 0 | – | |
| f(x) | 5000 | ↘ | 458 |

**3.** f est continue et strictement décroissante sur [0;20], f(0)=5000 et f(20)=458 donc 3000 appartient à l'intervalle [f(20);f(0)] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe $\alpha$ unique appartenant à [0;20] tel que $f(\alpha)=3000$.
Pour déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près, on peut utiliser la calculatrice par balayage ( en utilisant le résultat de la première question de la partie A, $\alpha$ à une valeur voisine de 6,8).
Ici on propose d'utiliser la méthode de dichotomie en utilisant le logiciel Python.
Programme (non demandé)

```
print('Début de programme')
from math import*
a=0
b=20
while (b-a)>=0.01:
    c=(a+b)/2
    if 1000*(c+5)*exp(-0.2*c)>=3000:
        a=c
    else:
        b=c
print("a="+str(a),"b="+str(b))
print('fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
a=6.875 b=6.884765625
fin de programme
```

Conclusion
**6,88 est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.**

**4.** On admet que la fonction F définie sur [0;20] par $F(x)=-5000(x+10)e^{-0,2x}$ est une primitive de f.

$$\int_2^8 f(x)\,dx = F(8)-F(2) = -5000\times 18\times e^{-1,6}+5000\times 12\times e^{-0,4}=60000\times e^{-0,4}-90000\times e^{-1,6}.$$

$\int_2^8 f(x)\,dx =$ **22 048 à l'unité près.**

Remarque
Par lecture graphique dans la partie A, on a obtenu $2000\times 11$ =22000.

**Partie C-Application économique**

**1.** f est décroissante sur [0;20], si $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ alors $f(x) \geqslant f(\alpha)=3000$
En dessous de $\alpha=6{,}88$ € la demande est supérieure à 3000 objets.

**2.** La valeur moyenne de la fonction f sur [0;20] est : $\mu = \frac{1}{8-2}\int_2^8 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_2^8 f(x)\,dx = \frac{22048}{6}=3675$

**Pour un prix compris entre 2€ et 8€ la demande moyenne d'objets est 3675.**