## Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Maya possède 20€ dans sa tirelire au $1^{er}$ juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20€ supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note $u_n$ la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du $n^{ième}$ mois
On a $u_0=20$ .

**1.a.** Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du $1^{er}$ mois est de 35€.

**1.b.** Calculer $u_2$ .

**2.** On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}75\,u_n+20$ .
On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
   U ← 0.75*U+20
   N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

**2.a.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme
On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés.
Arrondir les résultats au centième.

| Valeur de U | 20 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de N | 0 | | | | |
| Condition U < 70 | Vrai | Vrai | | Vrai | Faux |

**2.b.** Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**3.** Pour tout entier n, on pose $v_n=u_n-80$ .

**3.a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,75.

**3.b.** Préciser son premier terme $v_0$ .

**3.c.** En déduire que, pour tout entier n, $u_n=80-60\times0{,}75^n$ .

**3.d.** Déterminer, au centime près, le montant que Maya possédera dans sa tirelire au $1^{er}$ juin 2019.

**3.e.** Déterminer la limite de la suite $(v_n)$ .

**3.f.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**CORRECTION**

**1.a.** Pendant le mois de juin 2018 Maya dépense : $20\times\frac{1}{4}=5$ € puis place 20€ supplémentaires dans sa tirelire donc à la fin du 1er mois la somme de la tirelire de Maya est de : 20-5+20= **35€**.

**1.b.** Pendant le mois de juillet 2018 Maya dépense : $35\times\frac{1}{4}=8{,}75$ € puis place 20€ supplémentaires dans sa tirelire donc à la fin du 2ème mois la somme de la tirelire de Maya est $u_2$ =35-8,75+20= **46,25€.**

**2.a.** En effectuant les calculs, on obtient le tableau suivant :

| Valeur de U | 20 | 35 | 46.25 | 54.69 | 61.02 | 65.76 | 69.32 | 71.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Condition U < 70 | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Vrai | Faux |

**2.b.** La valeur affichée à la fin de l'exécution du programme est : **N=7.**
**À** la fin du mois de juillet (ou au 1er août 2018) la somme de la tirelire de Maya sera pour la première fois supérieure à 70€.
Remarque
On peut programmer l'algorithme en Python :

```
print('Début de programme')
U=20
N=0
while U<70:
    U=U*0.75+20
    N=N+1
    print("U="+str(U))
print("N="+str(N))
print('Fin de Programme')
```

La 7ème ligne n'est pas écrite dans le programme donné.
On a ajouté cette ligne pour pouvoir remplir le tableau de la question 2.a.
*Exécution du programme*

```
Début de programme
U=35.0
U=46.25
U=54.6875
U=61.015625
U=65.76171875
U=69.3212890625
U=71.990966796875
N=7
Fin de Programme
```

**3.** Pour tout entier n, on pose $v_n=u_n-80$ donc $u_n=v_n+80$

**3.a.** Pour tout entier naturel n

$$v_{n+1}=u_{n+1}-80=0{,}75\,u_n+20-80=0{,}75\left(v_n+80\right)-60=0{,}75\,v_n+60-60=0{,}75\,v_n$$

**La suite $(v_n)$ et une suite géométrique de raison 0,75.**

**3.b.** $v_0=u_0-80=20-80=$ **-60.**

**3.c.** Pour tout entier naturel n :

$$v_n=v_0\times q^n=-60\times0{,}75^n$$

$$u_n=v_n+80=80-60\times0{,}75^n\ .$$

**3.d.** Le montant que Maya possédera dans sa tirelire au 1er juin 2019 est $u_{12}$ .

$u_{17}=80-60\times 0{,}75^{12}$ = **78,01€.**

**3.e.** $0<0{,}75<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}75^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=$ **0.**

**3.f.** $u_n=80+v_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=$ **80.**

**À long terme , la somme, en fin de mois, sera toujours voisine de 80€.**