Exercice 1 5 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu=45$ et d'écart-type $\sigma=12$.
Pour tout événement E, on note P(E) sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :
1.a. $P(X=10)$
1.b. $P(X\geqslant 45)$
1.c. $P(21\leqslant X\leqslant 69)$
1.d. $P(21\leqslant X\leqslant 45)$

2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.

3. Déterminer la valeur de a, arrondie à l'unité, telle que $P(x\leqslant a)=0{,}30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

Partie B

En 2013, une étude a montré que 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits pour un échantillon de 300 clients pris au hasard en 2013.

Lors d'une enquête en 2018 auprès de 300 clients choisis au hasard, 286 ont déclaré être satisfaits.

2. Calculer la fréquence de clients satisfaits dans l'enquête réalisée en 2018.

3. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018 ? Justifier.

CORRECTION

Partie A

1.a. $P(X=10)=0$ car pour une loi continue la probabilité d'une valeur est nulle.
1.b. $P(X\geqslant 45)=0,5$ car 45 est l'espérance de la variable aléatoire X suivant une loi normale.
1.c. $\mu=45$ et $\sigma=12$ donc $\mu-2\sigma=45-2\times 12=21$ et $\mu+2\sigma=45+2\times 12=69$
Conséqunce
$P(21\leqslant X\leqslant 69)=P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=$ **0,955.**
1.d. 45 est l'espérance de la loi normale donc $P(45-24\leqslant X\leqslant 45)=P(45\leqslant X\leqslant 45+24)$
soit $P(21\leqslant X\leqslant 45)=P(45\leqslant X\leqslant 69)=\frac{1}{2}\times 0,955=$ **0,477** à 10^{-3} près.

2. En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(30\leqslant X\leqslant 60)=$ **0,788.**

3. En utilisant la calculatrice : $P(X\leqslant a)=0,30$ on obtient **a=38,71.**
30 % des clients restent moins de 39 minutes au supermarché.

Partie B

1. 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.
La probabilité qu'un client soit satisfait est p=0,89.
La taille de l'échantillon est n=300.
$n=300>30$ $\quad np=267\geqslant 5$ $\quad n(1-p)=33\geqslant 5$
Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits est :
$$I=\left[p-1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n\}}};p+1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=\left[0,89-1,96\times\sqrt{\frac{0,89\times 0,11}{300}};0,89+1,96\times\sqrt{\frac{0,89\times 0,11}{300}}\right]$$
$1,96\times\sqrt{\frac{0,89\times 0,11}{300}}=0,035$ à 10^{-3} près.
$I=[0,89-0,035;0,89+0,035]=$ **[0,855;0,925].**

2. La fréquence des clients satisfaits est égale à : $f=\frac{286}{300}=$ **0,953** à 10^{-3} près

3. f n'appartient pas à I donc on peut affirmer que **le taux de satisfaction de clients n'est pas stable entre 2013 et 2018 avec un risque d'erreur de 5 %.**
Remarque
L'enquête réalisée en 2018, indique que la proportion de clients satisfaits est peut-être augmentée depuis 2013.