Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m.
On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi.
Le 1^{er} janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.
Entre deux mesures successives, le niveau du lac évolue de la façon suivante :
. d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière).
. ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau dans le lac par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau du lac à midi, en cm, n jours après le 1^{er} janvier 2018.
Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1^{er} janvier 2018 est donné par $u_0=605$.
1.a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.
1.b. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1{,}06\,u_n-15$.

2. On pose pour $n\in\mathbb{N}$ $v_n=u_n-250$.
2.a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.
Préciser son terme initial.
2.b. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n=355\times1{,}06^n+250$

3. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir les vannes du barrage.
3.a. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3.b. L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau ?
Justifier la réponse.

4. Afin de déterminer la première date d'intervention des techniciens, on souhaite utiliser l'algorithme incomplet ci-dessous.

```
N ← 0
U ← 605
Tant que . . . . . . . . . . .faire
   U ← . . . . . . . . . . .
   N ← N+1
Fin tant que
```

4.a. Recopier et compléter l'algorithme.
4.b. À la fin de l'exécution de l'exécution de l'algorithme, que contient la variable N ?
4.c. En déduire la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrages.

CORRECTION

1.a. Le niveau d'eau du lac, du 1^{er} janvier 2018 au 2 janvier 2018 , augmente de 6 % soit $605\times\frac{6}{100}=36{,}3$ et diminue de 15 cm donc le niveau d'eau du lac au 2 janvier 2018 est $605+36{,}3-15 =$ **626,3.**

1.b. Le niveau d'eau du lac, du $n^{ième}$ jour après le 1^{er} janvier 2018 au $(n+1)^{ième}$ jour après le 1^{er} janvier 2018, diminue de 6% soit $u_n\times\frac{6}{100}=0{,}06\,u_n$ cm et diminue de 15 cm donc :

$u_{n+1}=u_n+0{,}06\,u_n-15=1{,}06\,u_n-15$.

2. Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-250$ donc $u_n=v_n+250$.

2.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-250=1{,}06\,u_n-15-250=1{,}06(v_n+250)-265 = 1{,}06\,v_n+265-265=1{,}06\,v_n$

(v_n) **est une suite géométrique de raison 1,06.**

Le premier terme est : $v_0=u_0-250=605-250 =$ **355.**

2.b. Pour tout entier naturel n,

$v_n=v_0\times q^n=355\times1{,}06^n$ et $u_n=v_n+250$

donc $u_n=355\times1{,}6^n+250$

3.a. $1{,}06 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}06^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

3.b. 10 m=1000 cm

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$ donc il existe un entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1000$

donc pour le $n^{ième}$ jour après le 1^{er} janvier 2018, il faudra ouvrir les vannes pour réguler le niveau d'eau.

4.a.

```
N ← 0
U ← 605
Tant que  U<1000   faire
   U ←  1.06xU-15
   N ← N+1
Fin tant que
```

4.b. La variable N contient le nombre de jours après le 1^{er} janvier 2018 nécessitant une intervention des techniciens pour réguler le niveau d'eau du lac.

4.c. On peut utiliser l'algorithme boucle par boucle avec la calculatrice, on obtient :

N	U
1	626.3
2	648.9
3	672.8
4	693.2
5	725.1
6	753.6
7	783.8
8	815.8
9	849.8
10	885.8
11	923.9
12	964.3
13	1007.2

Les valeurs de U sont arrondies au dixième.

On peut conclure : le 14 janvier à midi le niveau de l'eau serait supérieur à 10 m donc les techniciens doivent intervenir entre le 13 janvier 2018 midi et le 14 janvier 2018 midi.

. On peut programmer l'algorithme en Python.

Programme en Python

```
print('Début de programme')
N=0
U=605
while U<1000:
    U=1.06*U-15
    N=N+1
print("N="+str(N))
print ('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
N=13
Fin de programme
```

. On peut aussi résoudre l'inéquation :

$u_n \geqslant 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 355\times 1{,}06^n + 250 \geqslant 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 355\times 1{,}06^n \geqslant 750 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}06^n \geqslant \frac{750}{355} = \frac{150}{71}$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(1{,}06^n) \geqslant \ln\left(\frac{150}{71}\right) \quad \Leftrightarrow \quad n\times \ln(1{,}06) \geqslant \ln(150) - \ln(71)$

$1{,}06 > 1$ donc $\ln(1{,}06) > 0$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln(150)-\ln(71)}{\ln(1{,}06)} = 12{,}83$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 13$.