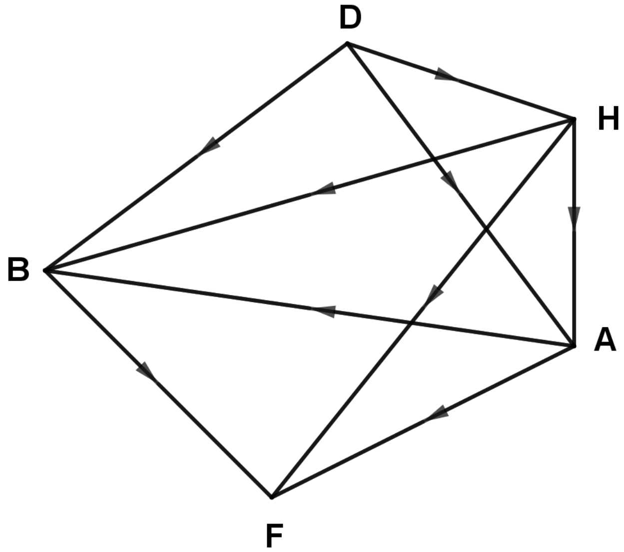
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux.
Le graphe orienté ci-dessous indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à E.



Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).
Les arêtes représentent les différents sentiers reliant ies sommets.

1. Quel est l'ordre du graphe ?

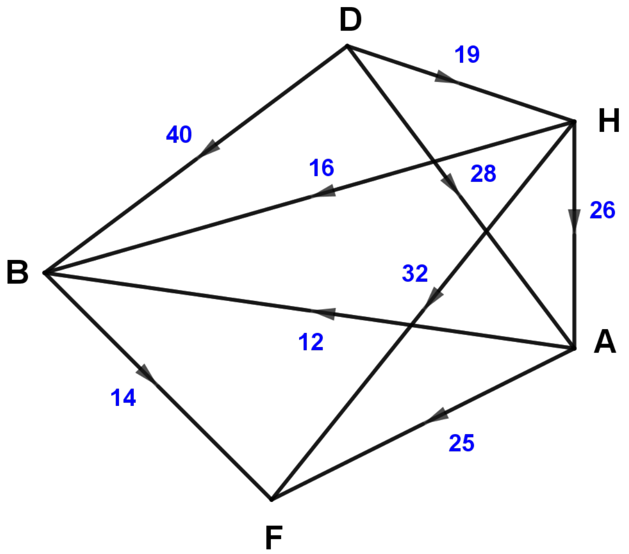
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

2.a. Déterminer M.

2.b. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours de 3 arêtes.
Est-ce possible?
Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?
Préciser ces trajets.

3. Assia a relevé ses temps de course en minute entre les différents sommets.
Ces durées sont portées sur le graphe ci-après.
Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F.
Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de cette course.



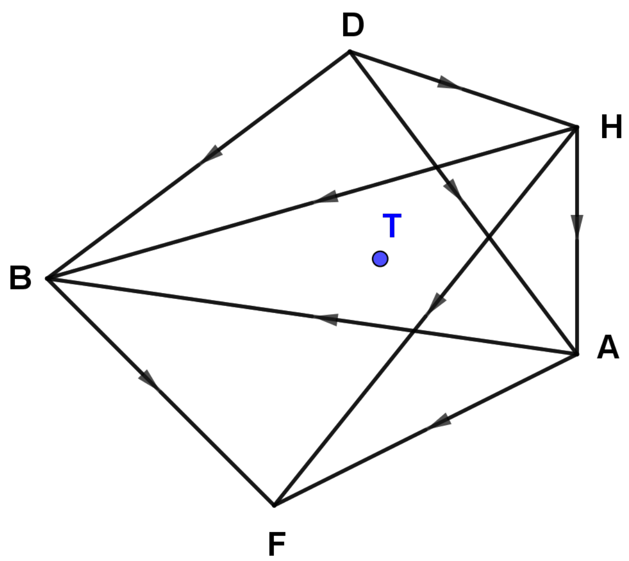
Partie B

Le responsable souhaite ajouter une barre de traction.
De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.
La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés en ordre alphabétique, est :

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter **l'annexe** à rendre avec la copie, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice N.

ANNEXE à rendre avec la copie



CORRECTION

1. L'ordre d'un graphe est égal au nombre de sommets de cc graphe.
Le graphe est d'ordre : **5.**

2.a. Dans cet exercice le graphe est orienté (il ya une différence de sens entre les arêtes AB et BA).
Sur la première ligne de la matrice d'adjacence, on considère les arêtes d'origine A, il en existe deux d'extrémités B et F. Conséquence : on écrit 1 pour le coefficient première ligne et deuxième colonne et aussi 1 pour le coefficient première ligne et quatrième colonne et pour les autres coefficients de la ligne on écrit 0.
Puis on continue pour les autres lignes.

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ D \\ F \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & D & F & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.b. Les coefficients de M^3 sont les nombres de chemins de longueur 3 (constitués de 3 arêtes) reliant des les sommets du graphe.
Dans la case correspondant au trajet DF on obtient 3 donc il existe 3 chemins de longueur 3 reliant les sommets D et F.
On détermine ces chemins.
D-A-B-F
D-H-B-F
D-H-A-F

3. Il n'y a que 3 chemins possibles, il n'est pas nécessaire d'utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le temps minimal.
D-A-B-F   28+12+14 = 54
D-H-B-F   19+16+14 = 49
D-H-A-F   19+26+25 = 70
Le trajet D-H-B-F est le trajet pour lequel le temps est minimal.
Ce temps minimal est 49 min.

Partie B

Par lecture de la matrice N (on ajouté une ligne et une colonne à la matrice M pour obtenir la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre 6).
On ajoute 3 arêtes au graphe précédent : AT, HT et TF.