Exercice 4 6 points

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle [-2;4] par : $f(x)=(2x+1)e^{-2x}+3$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que , pour tout $x\in[-2;4]$
$f'(x)=-4xe^{-2x}$

2. Étudier les variations de f.

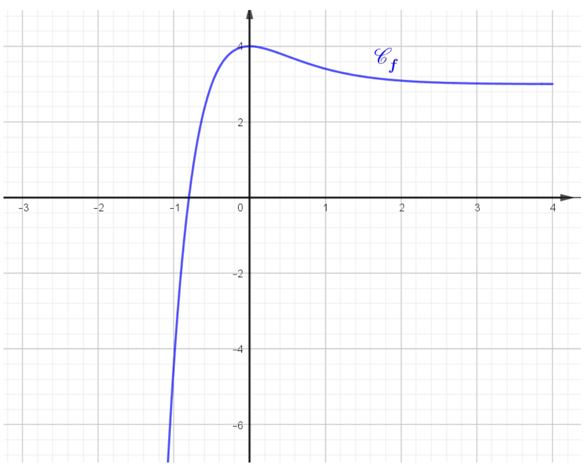
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur [-2;0] et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

4. On note f'' la fonction dérivée f' .
On admet que, pour tout $x\in[-2;4]$ $f''(x)=(8x-4)e^{-2x}$.
4.a. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle [-2;4].
4.b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle [-2;4] par $g(x)=(2x+1)e^{-2x}$.
5.a. Vérifier que la fonction G définie pour tout $x\in[-2;4]$ par $G(x)=(-x-1)e^{-2x}$ est une primitive de la fonction g.
5.b. En déduire une primitive F de f.

6. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1.
6a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique donné en annexe à rendre avec la copie.
6.b. Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathscr{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.
6.c. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis une valeur approchée au centième.

ANNEXE à rendre avec la copie



CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;4], $f(x)=(2x+1)e^{-2x}+3$

f est dérivable sur [-2;4]

$(e^{-2x})'=-2e^{-2x}$ $\qquad (2x+1)'=2$

$f'(x)=2e^{-2x}+(2x+1)\times(-2e^{-2x})=(2-4x-2)e^{-2x}=-4xe^{-2x}$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;4], $e^{-2x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est égal au signe de -4x.

$-4x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 0$

$-4x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$

<u>Variations de f</u>

x	-2		0		4
f'(x)		+	0	-	
f(x)	f(-2)	↗	f(0)	↘	f(4)

$f(0)=4 \qquad f(4)=9\times e^{-8}+3=3{,}003$ à 10^{-3} près $\qquad f(-2)=-3e^{4}+3=-160{,}79$ à 10^{-2} près.

3. f est continue et strictement croissante sur [-2;0], 0 appartient à l'intervalle [f(-2);f(0)] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle [-2;0].

$f(-0{,}8)=0{,}03$ à 10^{-2} près $\qquad f(-0{,}9)=-2{,}44$ à 10^{-2} près

donc $-0{,}9<\alpha<-0{,}8$.

-0,8 est une valeur approchée au dixième de α .

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;4], $f''(x)=(8x-4)e^{-2x}$.

4.a. $e^{-2x}>0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de (8x-4) sur [-2;4].

$8x-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0{,}5$

$8x-4>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>0{,}5$

$8x-4<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<0{,}5$

On donne le signe de f'' sous la forme d'un tableau.

x	-2		0.5		4
f''(x)		–	0	+	

4.b. f'' est positive sur [0,5;4] donc **f est convexe sur [0,5;4].**

5.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;4], $g(x)=(2x+1)e^{-2x}$ et $G(x)=(-x-1)e^{-2x}$

$(e^{-2x})'=-2e^{-2x}$ $\qquad (-x-1)'=-1$

$G'(x)=-1\times e^{-2x}+(-x-1)\times(-2e^{-2x})=(-1+2x+2)e^{-2x}=(2x+1)e^{-2x}=g(x)$

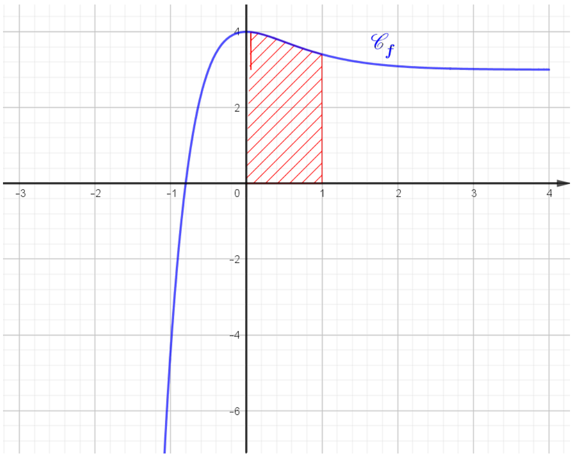
G est une primitive de g sur[-2;4].

5.b. $f(x)=g(x)+3$

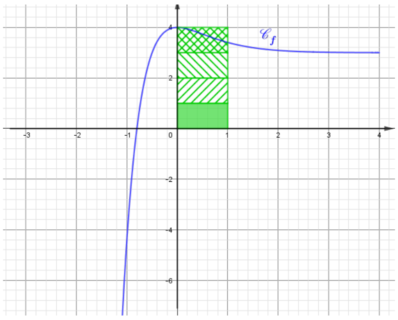
Soit $F(x)=G(x)+3x=(-x-1)e^{-2x}+3x$

F est une primitive de f sur [-2;4].

6.a. On hachure $\mathscr{D}$ sur la figure.



6.b.



L'unité d'aire est l'aire du rectangle coloré en vert.
Par lecture graphique
$3 < \mathscr{A} < 4$

6.c. $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = -2e^{-2} + 3 - (0-1)e^0 - 0 = 4 - 2e^{-2x}$ U.A.

$\mathscr{A} = 3{,}75$ au centième près.