Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une école de danse a ouvert ses portes en 2016. Cette année là, elle comptait 800 inscrits.
Chaque année, elle prévoit une augmentation de15 % des inscriptions ainsi que 90 désinscriptions.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'inscrits l'année 2016+n.
Chaque inscrit paye une cotisation annuelle de 150€, sur laquelle l'école conserve un bénéfice de 20 euros après avoir payé tous ses frais fixes. L'école économise ce bénéfice afin de construire une nouvelle salle de danse.
Pour cela, elle a besoin d'un budget de 125 000 euros.

Partie A

Les données sont saisies dans une feuille de calcul donnée en annexe.
Le format de cellule a été choisi pour que les nombres de la colonne C soient arrondi à l'unité.

1. Quelle formule peut-on saisir en C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le nombre d'inscrits l'année de rang n ?

2. Quelle formule peut-on saisir en E3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le bénéfice cumulé à l'année de rang n ?

3. Compléter sur l'annexe à rendre avec la copie, les six cellules des lignes qui correspondent aux années 2021 et 2022.

4. En quelle année l'école pourra-t-elle construire sa nouvelle salle de danse ?

Partie B

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}15u_n-90$ et préciser u_0.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-600$.

2.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme v_0.

2.b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

2.c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=200\times1{,}15^n+600$.

3. À partir de quelle année, cette école accueillera-t-elle plus de 2000 adhérents ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

	A	B	C	D	E
1	année	rang de l'année	nombre d'inscrts	bénéfice annuel	bénéfices cumulés
2	2016	0	800	16000	16000
3	2017	1	830	16600	32600
4	2018	2	865	17300	49900
5	2019	3	904	18080	67980
6	2020	4	950	19000	86980
7	2021	5			
8	2022	6			

CORRECTION

Partie A

1. En C3 on doit saisir :
=1,15*C2 – 90

2. En E3 on doit saisir :
=E2 + D3

3. $1,15\times950-90=1002,5$ arrondi à l'unité : **1003**
20×1003 **= 20060**
$86980+20060$ **= 107040**
$1,15\times1003-90=1063,45$ arrondi à l'unité : **1063**
20×1063 **= 21260**
$107040+21260$ **= 128300.**

	A	B	C	D	E
1	année	rang de l'année	nombre d'inscrts	bénéfice annuel	bénéfices cumulés
2	2016	0	800	16000	16000
3	2017	1	830	16600	32600
4	2018	2	865	17300	49900
5	2019	3	904	18080	67980
6	2020	4	950	19000	86980
7	2021	5	1003	20060	107040
8	2022	6	1063	21260	128300

4. En 2022, pour la première fois, la somme des bénéfices cumulés sera supérieure à 125 000€.
L'école de danse pourra construire sa nouvelle salle de danse en 2022.

Remarque
On propose de donner un programme Python pour cette situation.

Programmation

```
print('Début de programme')
a=2016
b=0
c=800
d=16000
e=16000
print("a="+str(a),"b="+str(b),"c="+str(c),"d="+str(d),"e="+str(e))
for i in range(6):
    a=a+1
    b=b+1
    c=1.15*c-90
    f=round(c)          #arrondi à l'unité de c
    d=f*20
    e=e+d
    print("a="+str(a),"b="+str(b),"c="+str(f),"d="+str(d),"e="+str(e))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
a=2016 b=0 c=800 d=16000 e=16000
a=2017 b=1 c=830 d=16600 e=32600
a=2018 b=2 c=864 d=17280 e=49880
a=2019 b=3 c=904 d=18080 e=67960
a=2020 b=4 c=950 d=19000 e=86960
a=2021 b=5 c=1002 d=20040 e=107000
a=2022 b=6 c=1063 d=21260 e=128260
Fin de programme
```

Il y a une petite différence entre les deux résultats.
Le logiciel Python utilise plus de décimales que le tableur.
Il y a une petite différence pour un arrondi.

Partie B

1. u_n est le nombre d'inscrits de l'année 2016+n.
u_{n+1} est le nombre d'inscrits de l'année 2016+n+1
Chaque année, l'école prévoit une augmentation de 15 % des inscriptions ainsi que 90 désinscriptions.
$u_{n+1}=u_n+\frac{15}{100}\times u_n-90=1,15\,u_n-90$ $u_0=800$ (nombre d'inscrits en 2016)

2.a. Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1}=u_{n+1}-601,15\,u\,n-90-600=1,15(v_n+600)-690=1,15\,v_n+690-690=1,15\,v_n$
$v_0=u_0-600=800-600=200$
(v_n) **est la suite géométrique de raison q=1,15 et de premier terme v_0 =200.**

2.b. Pour tout entier naturel n :
$v_n=v_0\times q^n=200\times 1,15^n$.

2.c. Pour tout entier naturel n :
$u_n=v_n+600=200\times 1,15^n+600$

3. $u_n>2000$ $\Leftrightarrow$ $200\times 1,15^n+600>2000$ $\Leftrightarrow$ $200\times 1,15^n>2000-600=1400$ $\Leftrightarrow$ $1,15^n>\frac{1400}{200}=7$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\Leftrightarrow$ $\ln(1,15^n)>\ln(7)$ $\Leftrightarrow$ $n\times\ln(1,15)>\ln(7)$
$1,15>1$ donc $\ln(1,15)>0$
$\Leftrightarrow$ $n>\frac{\ln(7)}{\ln(1,15)}=13,92$.
n est un entier naturel
$\Leftrightarrow$ $n\geqslant 14$
En 2030 le nombre d'adhérents de l'école de danse est supérieur à 2000.

