

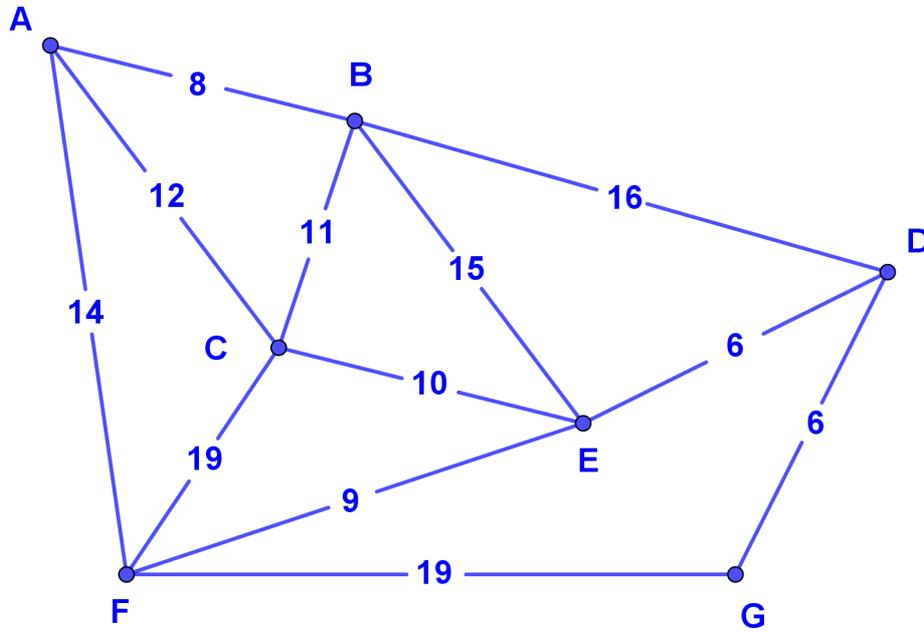
Exercice 3 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un investisseur immobilier doit visiter plusieurs bien à vendre dans une ville.

Le graphe ci-dessous représente le plan de la ville. Les biens à visiter sont identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F et G. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minute, entre deux biens.



- 1.a. Afin de découvrir la ville, l'investisseur souhaite emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens. Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer un tel trajet ?
- 1.b. Donner un exemple d'un tel trajet et préciser la durée en minute.
2. Lorsque l'investisseur immobilier termine ses visites par le bien A, il souhaite revenir au bien G le plus rapidement possible. Déterminer ce plus court chemin à l'aide d'un algorithme. Quelle est sa durée en minute ?

Partie B

L'investisseur commande une étude sur la population de sa ville qui lui révèle qu'en 2018, 80 % des locataires occupent un studio et 20 % des locataires occupent un T_2 (appartement de deux pièces), le nombre total de locataires ne varie pas mais chaque année :

- . la moitié des locataires en studio le conserve tandis que l'autre moitié change pour un T_2 ;
- . un quart des locataires en T_2 change pour un studio tandis que les autres conservent leur T_2 .

On considère les événements suivants :

- . S : « le locataire occupe un studio » ;
- . T : « le locataire occupe un T_2 ».

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets S et T.
2. Pour tout entier naturel n, on note s_n la proportion de locataires en studio et t_n la proportion de locataires en T_2 l'année 2018+n.
 - 2.a. Donner la matrice de transition associée à ce graphe.
 - 2.b. Donner l'état initial du graphe.
 - 2.c. Quel sera le pourcentage, arrondi à 0,1 %, de locataires en studio en 2023 ?

CORRECTION

Partie A

1.a. Pour pouvoir emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens, il faut que le graphe admette une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Si le nombre de sommets de degré impair est 2 alors toute chaîne eulérienne admet ces deux sommets pour extrémités.

On donne le degré de chaque sommet sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	3	4	4	3	4	4	2

Le nombre de sommets de degré impair est 2 donc le graphe admet au moins une chaîne eulérienne et **l'investisseur peut emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens.**

1.b. On donne un exemple de chaîne eulérienne d'origine A et se terminant en D.

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D$$

$$8 + 11 + 12 + 14 + 19 + 10 + 9 + 19 + 6 + 6 + 15 + 16 = 145$$

La durée du trajet est 145 minutes.

2. Pour déterminer le chemin le plus court (le plus rapide) on utilise l'algorithme de Dijkstra.

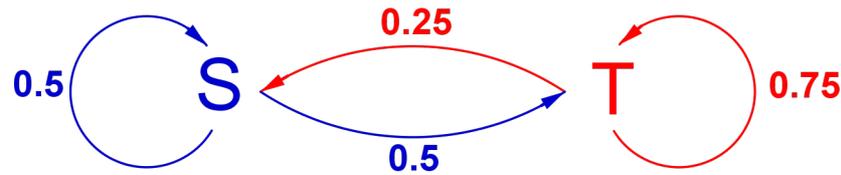
A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	8(A)	12(A)	∞	∞	14(A)	∞
	8(A)	12(A)	24(B)	23(B)	14(A)	∞
		12(A)	24(B)	22(C)	14(A)	∞
			24(B)	22(C)	14(A)	33(F)
			24(B)	22(C)		33(F)
			24(B)			30(D)
						30(D)

Le plus court chemin : $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G$ La durée de ce chemin est : **30 minutes.**

Partie B

- Les sommets du graphe sont : S et T.
 - Chaque année, la moitié des locataires en studio le conserve et l'autre moitié change pour un T_2 .
Le poids de l'arête SS est égal à 0,5.
Le poids de l'arête ST est égal à 0,5.
 - Chaque année, un quart des locataires en T_2 change pour un studio tandis que les autres conservent leur T_2 .
Le poids de l'arête TS est égal à 0,25.
Le poids de l'arête TT est égal à 0,75.

. On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. Remarque préliminaire

Cet exercice ne nous impose pas le choix de forme de matrice (matrices lignes ou matrices colonnes).
 Nous choisissons les matrices lignes car c'est la forme de matrice la plus utilisée en TES.

2.a. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique S puis T.

La matrice de transition du graphe probabiliste est la matrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête SS : 0,5

m_{12} est le poids de l'arête ST : 0,5

m_{21} est le poids de l'arête TS : 0,25

m_{22} est le poids de l'arête TT : 0,75

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

2.b. En 2018, 80 % des locataires occupent un studio et 20 % des locataires occupent un T_2 .

L'état initial est donc la matrice ligne $(0,8 \quad 0,2)$.

2.c. Pour tout entier naturel n

$$(s_n \quad t_n) = (s_0 \quad t_0) M^n$$

$$2023 = 2018 + 5$$

$$(s_5 \quad t_5) = (0,8 \quad 0,2) M^5$$

En utilisant la calculatrice et en arrondissant à 10^{-3} .

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0,334 & 0,666 \\ 0,333 & 0,667 \end{pmatrix}$$

$$s_5 = 0,8 \times 0,334 + 0,2 \times 0,333 = 0,2672 + 0,0666 = 0,3338 = 0,334 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Le pourcentage de locataires en studio en 2023 est 33,4 %.