Exercice 4 5 points

Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1000 et 5000 voitures.
Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.
On note r(x) la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner r(1).

2. On admet que, pour tout $x \in [1;5]$ la recette mensuelle modélisée par :
$\mathrm{r}(x)=6+x+2\ln(x)$

2.a. Montrer que, pour tout $x \in [1;5]$
$$\mathrm{r}'(x)=\frac{x+2}{x}$$

2.b. Étudier les variations de r sur l'intervalle [1;5].

3.a. Justifier que l'équation $\mathrm{f}(x)=10$ admet une unique solution α dans l'intervalle [1;5], puis donner une valeur approchée de α au millième.

3.b. Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.

4.a. Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1;5]$ par $\mathrm{g}(x)=2\ln(x)$.
Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1;5]$ par : $\mathrm{G}(x)=2x[\ln(x)-1]$ est une primitive de la fonction g.

4.b. En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle [1;5].

4.c. Donner une valeur approchée à la dizaine d'euros de la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2000 et 4000 voitures téléguidées.

CORRECTION

1. **r(1)=7.**
Car 1 000= 1 millier
70 000= 7 dizaines de milliers.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;5]
$r(x)=6+x+2\ln(x)$.

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$
$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$.
Donc pour tout nombre réel de l'intervalle [1;5]
$r'(x)=0+1+2\times\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x}$

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;5] : $\frac{x+2}{x}>0$

r est strictement croissante sur [1;5].

3.a. $r(1)=7$ et $r(5)=11+2\ln(5)=14{,}219$ à 10^{-3} près
r est continue et strictement croissante sur [1;5] et 10 appartient à l'intervalle [r(1);r(5)] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $r(x)=10$ admet une solution unique α appartient à [1;5].
En utilisant la calculatrice, on obtient $r(2{,}318)=9{,}999<10$ et $r(2{,}319)=10{,}001>10$.
Donc α = **2,318** à 10^{-3} près.

3.b. Le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros est : **2 318.**

4.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;5]
$G(x)=2x[\ln(x)-1]$
$(2x)'=2 \qquad (\ln(x))'=\frac{1}{x}$
$G'(x)=2[\ln(x)-1]+2x\times\frac{1}{x}=2\ln(x)-2+2=2\ln(x)=g(x)$
G est une primitive de g sur [1;5].

4.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;5]
$r(x)=6+x+2\ln(x)$
$R(x)=6x+\frac{1}{2}x^2+G(x)=6x+\frac{1}{2}x^2+2x[\ln(x)-1]$
R est une primituve de r sur [1;5].

4.c. La valeur moyenne de la fonction r sur [2;4] est :
$$M=\frac{1}{4-2}\int_2^4 r(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_2^4 r(x)\,dx$$
$$\int_2^4 r(x)\,dx=R(4)-R(2)$$
$R(4)=24+0{,}5\times16+8(\ln(4)-1)=24+8\ln(4)=24+16\ln(2)$
$R(2)=12+2+4(\ln(2)-1)=10+4\ln(2)$
$R(4)-R(2)=14+12\ln(2)$
$M=7+6\ln(2)=11{,}159$ à 10^{-3} près.
La valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2000 et 4000 voitures télécommandées est 111 590 euros.