Exercice 2 — 5 points

Cette étude porte sur l'utilisation principale des véhicules du parc automobile français.
Les réponses seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Les véhicules de la région parisienne représentent 16 % du parc automobile français en 2015.
22 % des véhicules de la région parisienne sont utilisées principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 34 % pour les loisirs.
En province, 49 % des véhicules sont utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 31 % pour les loisirs.
On choisit un véhicule au hasard dans le parc automobile français.

On note :
- R l'événement : « le véhicule provient de la région parisienne »,
- $\overline{R}$ l'événement : « le véhicule provient de la province »,
- T l'événement : « le véhicule est utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail »,
- L l'événement : « le véhicule est utilisé principalement pour les loisirs »,
- F l'événement : « le véhicule est utilisé principalement pour d'autres fonctions que le travail ou les loisirs ».

On rappelle que, si A et B sont deux événements, P(A) désigne la probabilité de l'événement A et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.

2. Montrer que la probabilité qu'un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est égale à 0,4468.

3. Madame Dupont et Monsieur Durand ont une conversation sur l'utilisation de leur véhicule.
Madame Dupont dit utiliser principalement sa voiture pour les loisirs, Monsieur Durand principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.
Qui de Madame Dupont et Monsieur Durand a la plus grande probabilité d'habiter la région parisienne ?

Partie B

On sélectionne un échantillon aléatoire de 10 véhicules du parc automobiles français. On note X la variable aléatoire qui compte, dans cet échantillon, le nombre de véhicules utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

1. Préciser la loi de probabilité de X ainsi que ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux véhicules soient utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

3. Déterminer la probabilité qu'au moins un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

Partie C

On s'intéresse à l'évolution du parc automobile de la région parisienne. On considère qu'en 2018 le nombre de milliers de véhicules nouvellement enregistrés en région parisienne suivra la normale de moyenne 50 et d'écart-type 4.

On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de milliers de véhicules nouvellement enregistrés en 2018 en région parisienne.

1. Quelle est la probabilité que le nombre de véhicule nouvellement enregistrés en région parisienne en 2018 soit compris entre 42 000 et 58 000 ?

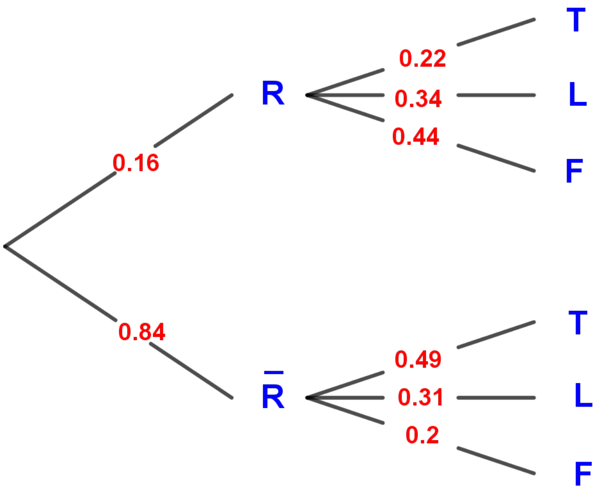
2. Pour ne pas avoir de délais d'enregistrement trop longs, le nombre de dossiers doit être inférieur à 55 000. Quelle est la probabilité que les délais d'enregistrements ne soient pas trop longs en 2018 ?

CORRECTION

Partie A

1. Les véhicules de la province représentent 100-16=84 % du parc automobiles.
$P(R)=0{,}16 \qquad P(\bar{R})=0{,}84$

- 22 % des véhicules de la région parisienne sont utilisés principalement pour le trajet domicile et le travail et 34 % pour les loisirs donc :
$P_{(T)}=0{,}22$ et $P_R(L)=0{,}34$.
Les événemenrs R, L et F forment une partition de l'univers donc :
$P_R(F)=1-P_R(T)-P_R(L)=1-0{,}22-034=0{,}44$.
- En province, 49 % des véhicules sont utilisés pour le trajet domicile et le travail et 31 % pour les loisirs donc
$P_{\bar{R}}(T)=0{,}49$ et $P_{\bar{R}}(L)=0{,}31$ et $P_{\bar{R}}(F)=1-0{,}49-0{,}31=0{,}2$
- On obtient l'arbre de probabilité :



2. $P(T)=P(R\cap T)+P(\bar{R}\cap T)=P(R)\times P_R(T)+P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(T)$
$P(T)=0{,}16\times 0{,}22+0{,}84\times 0{,}49=0{,}0352+0{,}4116=$ **0,4468.**

3. La probabilité de Madame Dupont d'habiter la région parisienne, sachant qu'elle utilise principalement son véhicule pour les loisirs est : $P_L(R)=\dfrac{P(L\cap R)}{P(L)}$.
$P(L)=P(R\cap L)+P(\bar{R}\cap L)=P(R)\times P_R(L)+P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(L)=0{,}16\times 0{,}34+0{,}84\times 0{,}31=0{,}3148$
$P(L\cap R)=0{,}16\times 0{,}34=0{,}0554$
$P_L(R)=\dfrac{0{,}0544}{0{,}3148}=$ **0,1728.**
La probabilité de Monsieur Durand d'habiter la région parisienne, sachant qu'il utilise principalement son véhicule pour le trajet entre le domicile et le travail est : $P_T(R)=\dfrac{P(T\cap R)}{P(T)}$.
$P(T\cap R)=0{,}16\times 0{,}22=0{,}0352$
$P_T(R)=\dfrac{0{,}0352}{0{,}4468}=$ **0,0788.**
Conclusion
Madame Dupont a la plus grande probabilité d'habiter la région parisienne.

Partie B

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante.

On sélectionne au hasard un véhicule parmi les 10 véhicules de l'échantillon.
Succès:S « le véhicule est principalement utilisé pour le trajet entre le domicile et le travail ».
La probabilité de succès est p=0,4468.
L'échec $\overline{S}$ est lévénement contraire et la probabilité de l'échec est : q=1-0,4468=0,5532.
On effectue 10 épreuves de bernoulli, indépendantes.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres n=10 et p=0,4468.

2. $P(X=2)=\binom{10}{2}\,0{,}4468^2\times0{,}5532^8=45\times0{,}4468^2\times0{,}5532^8=$ **0,0788.**

3. On veut déterminer $P(1\leqslant X)$.
$P(1\leqslant X)=1-P(X=0)=1-0{,}5532^{10}=$ **0,9973.**

Partie C

1. On nous demande de déterminer : $P(42\leqslant Y\leqslant 58)$.
On peut remarquer que :
$P(42\leqslant Y\leqslant 58)=P(50-2\times4\leqslant Y\leqslant 50+2\times4)=0{,}95$
Mais pour obtenir une valeur approchée au dix-millième on doit utiliser la calculatrice.
$P(42\leqslant Y\leqslant 58)=$ **0,9545.**

2. On nous demande de déterminer : $P(Y\leqslant 55)$
En utilisant la calculatrice, $P(X\leqslant 55)=$ **0,8944.**