Exercice 3   Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité   5 points

On étudie les abonnements à un grand quotidien de 2011 à 2015.

Le tableau suivant indique, pour chaque année de 2011 à 2015, le nombre d'abonnés.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés	620214	610156	575038	578282	555239
Taux d'évolution annuel		-1.62%	-5.76%	0.56%	-3.98%
Taux d'évolution par rapport à l'année 2011		-1.62%	-7.28%	-676%	-10.48%

Partie A

1. Retrouver par le calcul, le taux d'évolution annuel entre 2012 et 2013.

2. Le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2015 est environ de -2,73 %. Justifier.

Partie B

Afin d'étudier cette évolution, on suppose qu'à l'avenir, tous les ans, 10 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement à ce quotidien mais on compte 52 milliers de nouveaux abonnés.

En 2011, le nombre d'abonnés est égal, après arrondi, à 620 milliers.

On s'intéresse, pour tout entier naturel n, au nombre d'abonnés, en milliers, pour l'année (2011+n).

On note u_n le nombre d'abonnés en milliers pour l'année (2011+n).

On fixe donc $u_0=620$.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2012 suivant ce modèle.

2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,9\,u_n+52$.

3. On définit la suite (v_n) , pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-520$.

3.a. Démontrer que suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0 .

3.b. Exprimer (v_n) en fonction de n.

3.c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=100\times 0,9^n+520$.

4. Le quotidien est considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.

4.a. Recopier et compléter,l'algorithme suivant avant d'afficher l'année à partir de laquelle le quotidien sera en difficulté financière.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul
	U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à U la valeur 620
	Affecter à N la valeur 0
Traitement :	Tant que . . . . .
	Affecter à U la valeur . . . .
	Affecter à N la valeur . . . .
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher . . . .

4.b. Résoudre l'inéquation $u_n \leqslant 540$.

4.c. Déterminer à partir de quelle année le quotidien sera en difficulté financière.
Indiquer la démarche.

CORRECTION

Partie A

1. Taux d'évolution en pourcentage $=\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}\times 100$.

Le taux d'évolution en pourcentage entre 2012 et 2013 est égal à :

$\dfrac{575038-610156}{610156}\times 100=\dfrac{-35118}{610156}\times 100=-0{,}0576\times 100$ = **-5,76 à 10^{-2} près.**

2. Si t est le taux d'évolution en pourcentage annuel entre 2011 et 2015 (quatre années) alors :

$555239=\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^4\times 620214$

$\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^4=\dfrac{555239}{620214}=0{,}895238$

$1+\dfrac{t}{100}=0{,}9727$

$100+t=97{,}27$

t = -2,73 %.

Partie B

1. Le nombre d'abonnés en 2012 est égal au nombre d'abonnés en 2011:620 milliers, diminué de 10 % soit 62 milliers et augmenté de 52 milliers donc le nombre d'abonnés en 2012 est égal à :

$620-62-52$ = **612 milliers.**

2. Le nombre d'abonnés en milliers en 2011+n est u_n, le nombre d'abonnés en milliers en 2011+(n+1) est u_{n+1}.

Le nombre d'abonnés en milliers en 2011+(n+1) est égal au nombre d'abonnés en milliersen 2011+n : u_n diminué de 10 % de u_n : $0{,}1\,u_n$ et augmenté de 52 milliers donc :

$u_{n+1} = u_n-0{,}1\,u_n+52=0{,}9\,u_n+52$.

3. Pour tout entier naturel n : $V_n=u_n-520$ donc $u_n=v_n+520$.

3.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-520=0{,}9\,u_n+52-520=0{,}9(v_n+520)-468 = 0{,}9\,v_n+468-468=0{,}9\,v_n$

Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=u_o-520=100$ et de raison q=0,9.

3.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=100\times 0{,}9^n$

3.c. Pour tout entier naturel n :

$u_n=v_n+520=100\times 0{,}9^n+520$.

4. Le quotidien st considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.

4.a.

Variables :	N est un nombre entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à U la valeur 620
	Affecter à N la valeur 0
Traitement :	Tant que : **U ⩾ 540**
	Affecter à U la valeur **0,9U+52**
	Affecter à N la valeur **N+1**
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher **2011+N**

4.b. $u_n \leqslant 540 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \times 0{,}9^n + 520 \leqslant 540 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \times 0{,}9^n \leqslant 20 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9^n \leqslant \frac{20}{100} = 0{,}2$

ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}9^n) \leqslant \ln(0{,}2) \quad \Leftrightarrow \quad n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln(0{,}2)$

$0 < 0{,}9 < 1$ donc $\ln(0{,}9) < 0$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)}$

En utilisant la calculatrice $\frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)} = 15{,}28$ et n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 16$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à16.

4.c. En utilisant le résultat précédent, on peut affirmer que 2011+16=2027 est la première année pour laquelle le quotidien sera en difficulté financière.

. Remarque

On peut aussi utiliser l'algorithme proposer

Programmation en Python

```
print('Début de programme')
U=620
N=0
while(U>=540):
    U=0.9*U+52
    N=N+1
n=2011+N
print("Le quotiden sera en difficulté financi-re à partirde l'année:"+str(n))
print('Fin de programma')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
Le quotiden sera en difficulté financi-re à partirde l'année:2027
Fin de programma
```

On obtient le résultat demandé : 2027 est la première année pour laquelle le quotidien sera en difficulté financière.