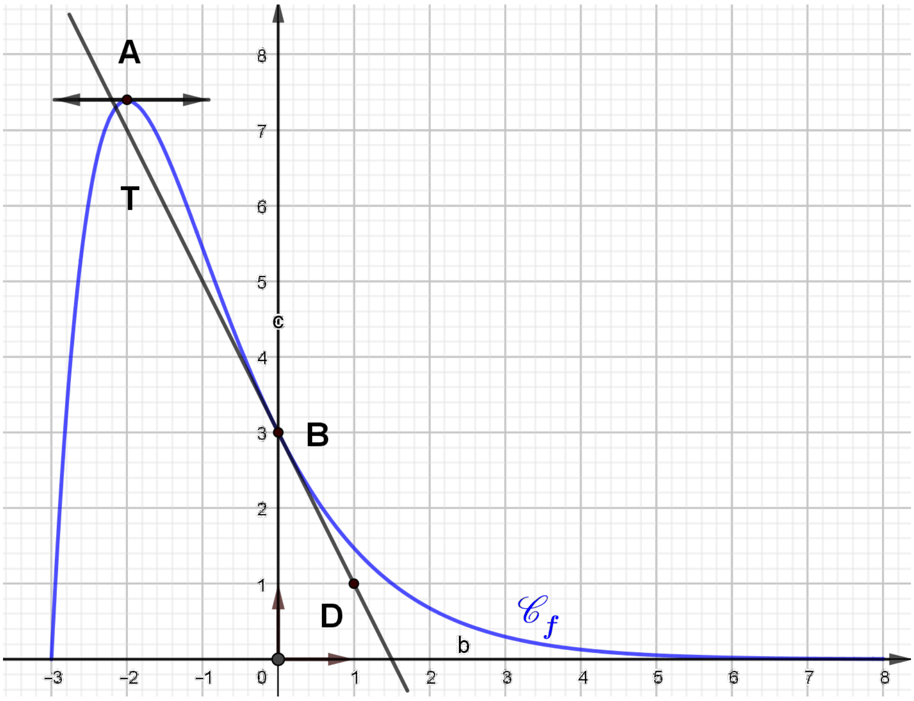
Exercice 4 — 6 points

Partie A

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-3;8].
On note f' sa fonction dérivée.
A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -2.
B est le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnée (0;3).
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est horizontale.
La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0 et elle passe par le point D(1;1).



À l'aide du graphique :

1. Donner la valeur de $f'(-2)$.
2. Interpréter géométriquement $f'(0)$ et donner sa valeur.
3. La fonction f est-elle convexe sur [-2;2].

Partie B

On admet désormais que la fonction f de la partie A est définie sur l'intervalle [-3;8] par :
$f(x)=(x+3)e^{-x}$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	dériver(x+3)*(exp(-x))
	exp(-x)+(x+3)*(-exp(-x))
2	factoriser(dériver(x+3)*exp(-x))
	(-x-2)*exp(-x)

1. Étudier le signe de la dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle[-3;8]

3.a. Montrer que l'équation f(x)=3 admet une unique solution α sur [-3;-2].
3.b. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près

4.a. Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle [-3;8] par :
$\mathrm{F}(x)=(-x-4)\mathrm{e}^{-x}$
est une primitive def sur le même intervalle.

4.b. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^3 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$.

CORRECTION

Partie A

1. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -2 est horizontale, son coefficient directeur est égal à 0 donc $f'(-2)=0$.

2. La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0, passe par D, le coefficient de cette droite est :
$\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{1-3}{1-0}=-2$ donc $f'(0)=-2$

3. $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente au point A d'abscisse -2 donc f n'est pas convexe sur [-2;2].

Partie B

1. Le logiciel de calcul formel, nous donne :
$f'(x)=(-x-2)e^{-x}$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-3;8], $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (-x-2).
$-x-2=0 \Leftrightarrow x=-2$
$-x-2>0 \Leftrightarrow -2>x$
$-x-2<0 \Leftrightarrow -2<x$
On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	-3		-2		8
f '(x)		+	0	−	

2. $f(x)=(x+3)e^{-x}$
$f(-3)=0$ $f(-2)=e^2$ $f(8)=11e^{-8}=0{,}004$ à 10^{-2} près.
Tableau de variation de f

x	-3		-2		8
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	e^2	↘	$11e^{-8}$

3.a. f est continue et strictement croissante sur [-3;-2], 3 appartient à l'intervalle [f(-3);f(-2)]= $[0;e^2]$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=3 admet une solution unique α appartenant à l'intervalle [-3;-2].

3.b. En utilisant la calculatrice on peut obtenir une valeur approchée de α .

. On peut utiliser la méthode par dichotomie.

Progamme en Python


```
print('Début de programme')
from math import*
print("Veuillez entrer un rntier naturel")    # pour la précision demandée
k=input()                                     # on saisit la valeur donnée
p=int(k)                                      # on précise que l'on a un entier
a=-3                                          # borne inférieure de l'intervalle
b=-2                                          # borne supérieure de l'intervalle
while(b-a>10**(-p)):
      c=(a+b)/2                               # centre de l'intervalle
      f=(c+3)*exp(-c)                          # image de c par la fonction f
      if f>3:
          b=c                                 # la fonction f est croissante
      else:
          a=c
print(a," ",b)
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
Veuillez entrer un rntier naturel
3
-2.822265625    -2.8212890625
Fin de programme
```

Conséquence

2,82 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-3;8] :

$f(x)=(x+3)e^{-x}$ $\quad F(x)=(-x-2)e^{-x}$

F est une primitive de f sur [-3;8] si et seulement si $F'(x)=f(x)$

$(-x-4)'=-1$ $\quad (e^{-x})'=-e^{-x}$

On dérive un produit.

$F'(x)=-1\times e^{-x}+(-x-4)(-e^{-x})=-e^{-x}+(x+4)e^{-4}=(x+3)e^{-x}=f(x)$

4.b. $\int_0^3 f(x)\,dx$ = F(3) – F(0) = $-7e^{-3}-(-4e^0)=4-7e^{-3}$.