

Exercice 2 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité* 5 points

Dans un quartier d'une petite ville, les services de Pôle Emploi ont relevé le nombre de demandeurs d'emploi chaque trimestre.

Après observations, ils constatent que, chaque trimestre, 123 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent tandis que 37,5 % des chômeurs trouvent un emploi et sont retirés des listes.

Au début du premier trimestre 2017 (1^{er} janvier 2017), le nombre des demandeurs d'emploi était de 490.

On note u_n le nombre de demandeurs d'emploi au début du $n^{\text{ième}}$ trimestre après le premier janvier 2017.

Ainsi, $u_1 = 490$.

Dans tout l'exercice, les valeurs seront arrondies à l'unité.

1. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième et du troisième trimestre 2017.
2. Justifier que l'on peut modéliser la situation précédente par la relation, pour tout entier naturel non nul n :
$$u_{n+1} = 0,625 u_n + 123$$
.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel non nul n , $v_n = u_n - 328$.
 - 3.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
 - 3.b. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , v_n en fonction de n .
 - 3.c. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a $u_n = 162 \times 0,625^{n-1} + 328$.
4. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième trimestre 2019.
5. Le directeur de l'agence pourra-t-il atteindre son objectif de diminuer le nombre de demandeurs d'emploi de 30 % par rapport au premier trimestre 2017 ?
Si oui, indiquer à quelle date son objectif sera atteint. Justifier la réponse.

CORRECTION

1. Au deuxième trimestre, il y a 37,5 % de chômeurs qui trouvent un emploi, soit :

$$490 \times \frac{37,5}{100} = 183,75 = 184 \text{ à une unité près.}$$

$$490 - 184 = 306 .$$

Mais il y a 123 nouveaux demandeurs d'emploi :

$$306 + 123 = 429 \text{ donc } u_2 = \mathbf{429.}$$

- . Au troisième trimestre, il y a 37,5 % de chômeurs qui trouvent un emploi, soit :

$$429 \times \frac{37,5}{100} = 160,875 = 161 \text{ à l'unité près.}$$

$$429 - 161 = 268$$

Mais il y a 123 nouveaux demandeurs d'emploi :

$$268 + 123 = 391 \text{ donc } u_3 = \mathbf{391.}$$

2. Pour tout entier naturel non nul n :

u_n est le nombre de chômeurs au $n^{\text{ième}}$ trimestre.

u_{n+1} est le nombre de chômeurs au $(n+1)^{\text{ième}}$ trimestre

Au $(n+1)^{\text{ième}}$ trimestre, il y a 37,5 % de chômeurs qui trouvent un emploi, soit :

$$u_n \times \frac{37,5}{100} = 0,375 u_n$$

$$u_n - 0,375 u_n = 0,625 u_n .$$

Mais il y a 123 nouveaux demandeurs d'emploi

$$u_{n+1} = 0,625 u_n + 123$$

3. Pour tout entier naturel non nul n :

$$v_n = u_n - 328 \text{ donc } u_n = v_n + 328$$

- 3.a. Pour tout entier naturel non nul n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 328 = 0,625 u_n + 123 - 328 = 0,625 \times (v_n + 328) - 205 = 0,625 v_n + 205 - 205 = 0,625 v_n$$

$$v_1 = u_1 - 328 = 490 - 328 = 162$$

(v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,625$ et de premier terme $v_1 = 162$.

- 3.b. Pour tout entier naturel non nul n :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 162 \times 0,625^{n-1}$$

- 3.c. Pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = v_n + 328 = 162 \times 0,625^{n-1} + 328$$

4. On nous demande de calculer u_{10}

$$u_{10} = 162 \times 0,625^9 + 328 = 330,36 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$u_{10} = \mathbf{330} \text{ à l'unité près .}$$

5. Le directeur de l'agence veut diminuer de 30 % le nombre des demandeurs d'emploi par rapport au premier trimestre, soit

$$490 \times \frac{30}{100} = 147$$

Le nombre de demandeurs d'emploi serait alors de : $490 - 147 = \mathbf{343.}$

Or au deuxième trimestre de 2019 sera de $330 < 343$ donc **l'objectif du directeur sera atteint.**

Pour obtenir le trimestre pour lequel on obtient pour la première fois un nombre de demandeurs d'emploi inférieur ou égal à 343, il faut résoudre l'inéquation $u_n \leq 343$

Remarque

Dans cet exercice, on arrondit la réponse à l'unité donc 343,31 est égal à 343 à l'unité près

On doit donc considérer l'inéquation $u_n < 343,5$.

$$u_n < 343,5 \Leftrightarrow 162 \times 0,625^{n-1} + 328 < 343,5 \Leftrightarrow 162 \times 0,625^{n-1} < 15,5 \Leftrightarrow 0,625^{n-1} < \frac{15,5}{162}$$

\ln est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,625^{n-1}) < \ln\left(\frac{15,5}{162}\right) \Leftrightarrow (n-1) \times \ln(0,625) < \ln(15,5) - \ln(162)$$

$0 < 0,625 < 1$ donc $\ln(0,625) < 0$

$$\Leftrightarrow n-1 > \frac{\ln(15,5) - \ln(162)}{\ln(0,625)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln(15,5) - \ln(162)}{\ln(0,625)} + 1$$

$$\frac{\ln(15,5) - \ln(162)}{\ln(0,625)} = 4,99 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel

$$\Leftrightarrow n \geq 6$$

Conclusion

Le nombre de demandeurs d'emploi sera diminuer de 30 % par rapport au premier trimestre 2017, pour la première fois au deuxième trimestre 2018.