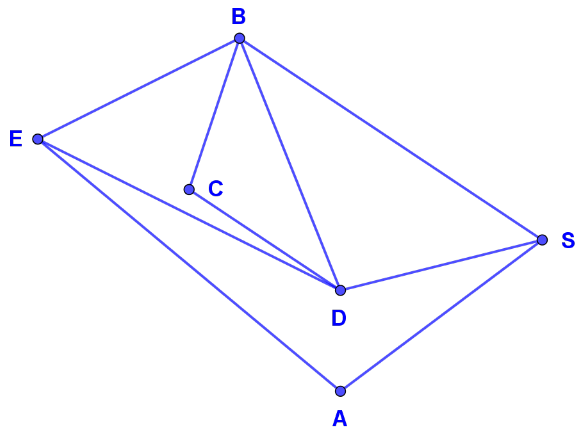
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Naïma fait partie d'une école de musique. En vue du spectacle de fin d'année, elle souhaite déposer à vélo des affiches publicitaires sur les panneaux de sa ville. Les pistes cyclables reliant ces panneaux sont représentées sur le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.



Le sommet E désigne son école de musique, le sommet S la salle de spectacle et les sommets A, B, C et D les panneaux d'affichage.

1. Déterminer, en justifiant la réponse, si le graphe $\mathcal{G}$ est :

1.a. complet ;

1.b. connexe.

2. Naïma pourra-t-elle déposer ses affiches sur tous les panneaux en allant de son école de musique à la salle de spectacle et en empruntant une et une seule fois chaque piste cyclable ?
Justifier la réponse. Si un tel trajet existe, en citer un.

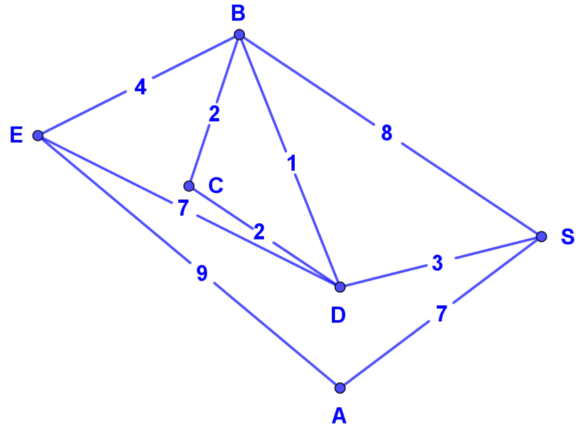
3. Donner la matrice d'adjacence M liée à ce graphe dans laquelle les sommets seront classés dans l'ordre suivant : E, A, B, C, D, S.

4. On donne la matrice incomplète M^2 : $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4.a. Déterminer les coefficients manquants de la matrice M^2, en détaillant les calculs.

4.b. Combien existe-t-il de chemin permettant de se rendre de l'école de musique à la salle de spectacle en empruntant exactement deux pistes cyclables.

5. Lorsqu'elle a déposé ses affiches, Naïma a relevé le temps de trajet entre chaque panneau d'affichage.



Indiquer à l'aide d'un algorithme, le chemin permettant à Naïma de se rendre le plus rapidement possible de son école de musique à la salle de spectacle le soir de la représentation.

Donner la durée de ce parcours.

CORRECTION

1. Le graphe $\mathcal{G}$ **n'est pas complet** car les sommets E et C ne sont pas reliés par une arête.
Le graphe $\mathcal{G}$ **est connexe** car deux sommets du graphe sont toujours reliés par une chaîne.

2. On nous demande s'il existe une chaîne eulérienne reliant E à S.
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Si le nombre de sommets de degré impair est deux alors ces deux sommets sont les extrémités de toute chaîne eulérienne.

On donne les degrés des sommets du graphe $\mathcal{G}$ sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	S
Degrés	2	4	2	4	3	3

Il existe au moins une chaîne eulérienne reliant E à S.
Exemple
E-B-D-E-A-S-D-C-B-S

3. Les sommets sont numérotés de 1 à 6 dans l'ordre E, A, B, C, D, S.
La matrice d'adjacence M liée au graphe $\mathcal{G}$ est une matrice carrée d'ordre 6 le coefficient m_{ij} $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne est égal à 1 s'il existe une arête reliant le $i^{\text{ième}}$ sommet au $j^{\text{ième}}$ sommet sinon m_{ij} est 0.

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.a. Le graphe $\mathcal{G}$ est un graphe non orienté donc la matrice d'adjacence est une matrice symétrique c'est à dire que pour tous entiers naturels i et j compris entre 1 et 6 on a : $m_{ij}=m_{ji}$.
Toutes les puissances de M sont aussi des matrices symétriques.
Si on note m'_{ij} les coefficients de la matrice M^2 alors on doit déterminer les coefficients m_{14} et m_{41} .
On a $m_{14}=m_{41}$.
Pour obtenir m_{14} , on multiplie la première ligne de M par la quatrième colonne de M.

$$m_{14}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=0\times 0+1\times 0+1\times 1+0\times 0+1\times 1+0\times 1=\mathbf{2}$$

$m_{14}=m_{14}=$ **2**

4.b. m'_{ij} est le nombre de chemins empruntant exactement deux pistes cyclables reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet.
Le nombre de chemins empruntant exactement deux pistes cyclables reliant E à S (premier sommet et sixième sommet) est $m'_{16}=m'_{61}=$ **3.**
Ces trois chemins sont :

E-B-S
E-D-S
E-A-S

5. On utilise l'algorithme de Dijkstra.

E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	9(E)	4(E)	∞	7(E)	∞
	9(E)	4(E)	6(B)	5(B)	12(B)
	9(E)		6(B)	5(B)	8(D)
	9(E)		6(B)		8(D)
	9(E)				8(D)

Le plus court chemin est :

$$E \xrightarrow{4} B \xrightarrow{1} D \xrightarrow{3} S$$

La durée de ce parcours est : 4+1+3= **8 min.**