## Exercice 3 — 6 points

Dans une entreprise, 60 % des salariés viennent au travail en transports en commun, et parmi eux, seulement 7,5 ont un trajet d'ue durée inférieure à 30 minutes. Parmi les employés qui n'utilisent pas les transports en commun, 28,5 % ont un trajet d'une durée inférieure à 30 minutes.
Pour tout événement E on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E et P(E) sa probabilité. Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge au hasard un employé de l'entreprise et on considère les événements suivants :
. C : « l'employé utilise les transports en commun » ;
. R : « le trajet de l'employé a une durée inférieure à 30 minutes ».
Dans cet exercice les résultats seront arrondis au millième.

**Partie A**

**1.** Construire l'arbre pondéré représentant la situation et le compléter.

**2.a.** Calculer $P(C \cap R)$ et interpréter le résultat obtenu.
**2.b.** Montrer que $P(B)=0{,}159$ .

**3.** On interroge un employé choisi au hasard dont la durée du trajet est inférieure à 30 minutes.
Calculer la probabilité qu'il utilise les transports en commun.

**Partie B**

Une étude a montré que la durée du trajet en minutes d'un employé peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu=40$ et d'écart-type $\sigma=10$ .

**1.** Déterminer $P(X \leqslant 30)$ . Indiquer si ce résultat est cohérent avec la partie A, en justifiant la réponse.

**2.** Déterminer $P(20 \leqslant X \leqslant 60)$ et en déduire $P(X>60)$ .

**3.** Dans cette question, on se propose de déterminer le plus petit entier tel que $P(X \geqslant a)=0{,}008$ .
**3.a.** On admet que lorsque la valeur de a augmente, la valeur $P(X \geqslant a)$ diminue.
On considère l'algorithme ci-dessous, où X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu=40$ et d'écart-type $\sigma=10$ .
Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il permette de répondre à la question.

```
a ← 60
Y ← 0.023
Tant que Y > 0.008
   a ← . . .
   Y ← P(X ≥ a)
Fin Tant que
```

**3.b.** On exécute cet algorithme.
Recopier et compléter le tableau suivant, en utilisant autant de colonnes que nécessaire.

| a | 60 | 61 | 62 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0.023 | 0.018 | 0.014 | | | |

**4.** Donner la valeur de a obtenue après exécution de l'algorithme.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

**CORRECTION**

**Partie A**

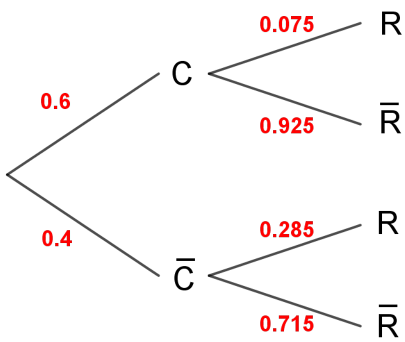
**1.** L'énoncé précise :

. 60 % des salarés viennent au travail en transports en commun, donc :
$P(C)=0{,}6$ et $P(\bar{C})=1-P(C)=1-0{,}6=0{,}4$ .

. Parmi les salariés venant au travail en transports en commun, 7,5 % ont un trajet de durée inférieure à 30 minutes, donc :
$P_C(R)=0{,}075$ et $P_C(\bar{R})=1-P_C(R)=1-0{,}075=0{,}925$ .

. Parmi les salariés ne venant pas au travail en transports en commun, 28,5 % ont un trajet de durée inférieure à 30 minutes, donc :
$P_{\bar{C}}(R)=0{,}285$ et $P_{\bar{C}}(\bar{R})=1-P_{\bar{C}}(R)=1-0{,}285=0{,}715$ .

. On obtient l'arbre pondéré :




**2.a.** $P(C\cap R)=P(C)\times P_C(R)=0{,}6\times 0{,}75=$ **0,045**

4,5 % des salariés de l'entreprise viennent au travail en transports en commun **et** ont un trajet de durée inférieure à 30 minutes.

**2.b.** En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :

$P(R)=P(C\cap R)+P(\bar{C}\cap R)=P(C)\times P_C(R)+P(\bar{C})\times P_{\bar{C}}(R)=0{,}6\times 0{,}075+0{,}4\times 0{,}285=0{,}045+0{,}114$

**P(R)= 0,159**

**3.** On nous demande de calculer $P_R(C)$

$$P_R(C)=\frac{P(C\cap R)}{P(R)}=\frac{0{,}045}{0{,}159}=\frac{45}{159}=\mathbf{0{,}283.}$$

**Partie B**

**1.** X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu=40$ et d'écart-type $\sigma=10$ .

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$P(X\leqslant 30)=0{,}1587=$ **0,159 au millième près.**

Or l'événement $(X\leqslant 30)$ est l'événement R et dans la partie A on a trouvé P(R)=0,159.

Il y a bien cohérence entre le résultat trouvé dans la partie A et le résultat trouvé dans la partie B.

<u>Remarque</u>

On peut obtenir ce résultat sans utiliser la calculatrice.

On doit connaître les résultats suivants :

pour toute variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu$ et d'écart-type $\sigma$

$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)=0{,}683$

$P(X<\mu-\sigma)=P(\mu+\sigma<X)=\frac{1}{2}\times(1-0{,}683)=0{,}5\times 0{,}317=0{,}1585=$ **0,159 au millième près.**

Pour notre exemple : $\mu-\sigma=30$ .

**2.** En utilisant la calculatrice :

$P(20 \leqslant X \leqslant 60) = 0{,}9545$ = **0,955 au millième près.**
$P(X > 60) = 0{,}228$ **= 0,023 au millième près.**
Remarque
$P(\mu - 2\times\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\times\sigma) = 0{,}955$
$P(X < \mu - 2\times\sigma) = P(\mu + 2\times\sigma) = \frac{1}{2}\times(1 - 0{,}955) = 0{,}5\times 0{,}045 = 0{,}025$ =0,023 millième près

**3.a.** On complète l'algorithme.

```
a ← 60
Y ← 0.023
Tant que Y > 0.008
   a ← a+1
   Y ← P(X ≥ a)
Fin Tant que
```

**3.b.** En utilisant la calculatrice, on obtient :
P(X<63)= 0,0107= 0,011 au millième près.
P(X<64)= 0,0082= 0,008 au millième près.
P(X<65)= 0,0062= 0,006 au millième près.
On complète le tableau.

| a | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0.023 | 0.018 | 0.014 | 0.011 | 0.008 | 0.006 |

Conclusion
**P(X<64) = 0,008 au millième près.**

**4.** $P(X \geqslant 65) > 0{,}008$ donc l'algorithme effectue une nouvelle boucle.
$P(X \geqslant 65) = 0{,}0062 < 0{,}008$ .
La valeur de $a$ obtenue après l'exécution de l'algorithme est 65.
65 est le plus petit entier naturel $a$ tel que $P(X \leqslant a) \leqslant 0{,}008$ .