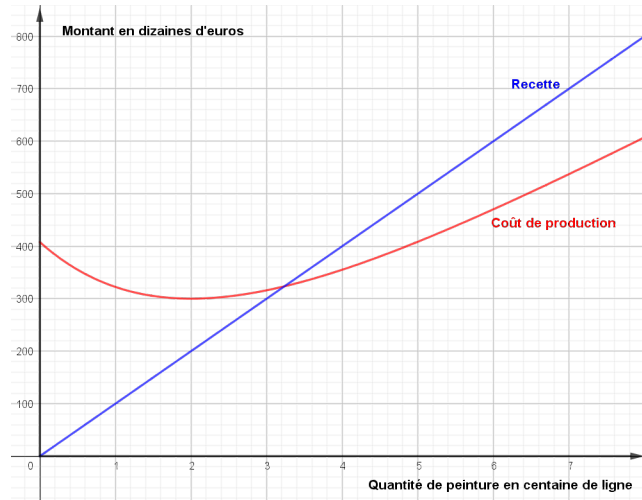


Exercice 4

5 points

L'entreprise ECOLOR est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable. La production quotidienne varie entre 0 et 800 litres. Toute la production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.



Partie A : lecture graphique

À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

- Déterminer le coût de production de 200 litres de peinture.
- Quelle est la production de peinture pour avoir une recette de 5000 € ?
- À partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
- L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice de plus de 3000 euros pour une production quotidienne variant entre 0 et 800 litres ? Justifier.

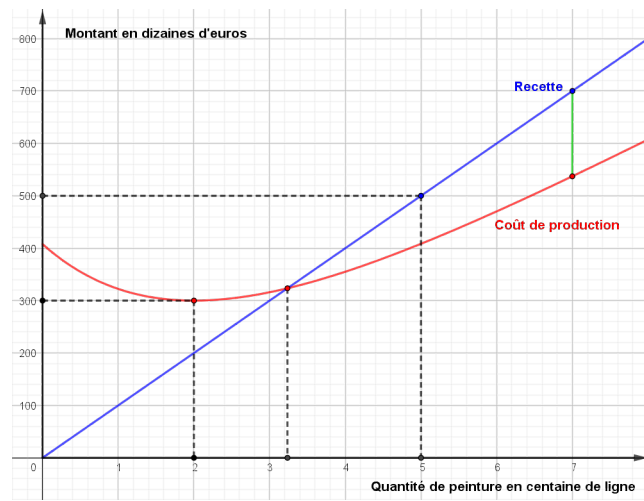
Partie B : étude du bénéfice

Le bénéfice en dizaine d'euros correspond à la vente de x centaines de litres de peinture est donné par la fonction f définie sur l'intervalle [0;8] par :  $f(x) = 25x - 150e^{-0,5x+1}$

- Donner les valeurs exactes de  $f(0)$  et  $f(8)$ , puis en donner les valeurs arrondies au centième.
- Montrer que la dérivée  $f'$  de la fonction f définie sur l'intervalle [0;8] est :  $f'(x) = 25 + 75e^{-0,5x+1}$ .
- Déterminer le signe de  $f'$  et en déduire les variations de f sur l'intervalle [0;8].
- Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle [0;8] puis en donner la valeur arrondie au centième.
  - En déduire la quantité de peinture produite et vendue à partir de laquelle l'entreprise ECOLOR réalisera un bénéfice. Donner le résultat au litre près.

**CORRECTION**

**Partie A : lecture graphique**




- On détermine l'ordonnée du point de la courbe: coût de production d'abscisse 2 (2 centaines de litres), on obtient 300 (300dizaines d'euros).  
Le coût de production de 200 litres de peinture est : **3000€**.
- On détermine l'abscisse du point de la courbe: Recette d'ordonnée 500 ( 500dizaines d'euros), on obtient 5 (5 centaines de litres).  
L'entreprise doit produire **500 litres** de peinture pour obtenir une recette de 5000 €.
- L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la courbe : Recette est au dessus de la courbe : coût de production. On détermine l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes, on obtient 3,2 (centaines de litres).  
L'entreprise réalise un bénéfice pour toute production supérieure à **320 litres**.
- Le bénéfice réalisé par l'entreprise pour une production donnée est la différence entre la recette et le coût de production.  
Pour une valeur de x donnée (supérieure à 3,2) le bénéfice est la différence des ordonnées entre les points des deux courbes d'abscisses x.  
On constate que cette différence est maximale pour x=8 cette différence est égale à 190 (dizaines d'euros).  
Le bénéfice quotidien est inférieur à 1900 € donc **il n'existe pas de production permettant d'obtenir un bénéfice de 3000 €**.

**Partie B : étude du bénéfice**

- $f(x) = 25x - 150e^{-0,5x+1}$   
 $f(0) = 25 \times 0 - 150 \times e^{-0,5 \times 0 + 1} = -150e^1 = -407,74$  **au centième près.**  
 $f(8) = 25 \times 8 - 150e^{-4+1} = 200 - 150e^{-3} = 192,53$  **au centième près.**
- $(e^u)' = u' e^u \quad (e^{-0,5x+1})' = -0,5e^{-0,5x+1}$   
 Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;8]  
 $f'(x) = 25 - 150 \times (-0,5e^{-0,5x+1})$   
 $f'(x) = 25 + 75e^{-0,5x+1}$
- Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;8]  
 $e^{-0,5x+1} > 0$  donc  $f'(x) > 0$   
 f est strictement croissante sur [0;8]

|              |             |             |
|--------------|-------------|-------------|
| <b>x</b>     | <b>0</b>    | <b>8</b>    |
| <b>f'(x)</b> | <b>+</b>    |             |
| <b>f(x)</b>  | <b>f(0)</b> | <b>f(8)</b> |



4.a.  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[0;8]$ ,  $f(0) < 0$  et  $f(8) > 0$  donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation  $f(x)=0$  admet une unique solution  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[0;8]$ .

$f(3,23)=-0,35 < 0$  et  $f(3,24)=0,31 > 0$  donc  $3,23 < \alpha < 3,24$

$f(3,235)=-0,02 < 0$  donc  $3,235 < \alpha < 3,24$

**3,24 est la valeur arrondie au centième de  $\alpha$ .**

4.b.  $f(\alpha)=0$  et si  $\alpha \leq x$  alors  $f(\alpha)=0 \leq f(x)$ .

$\alpha$  est l'abscisse du point d'intersection des courbes:Recette et Coût de production.

$\alpha=3,24$  (centaines de litres).

**Il faut donc produire 324 litres de peinture pour que l'entreprise réalise un bénéfice.**