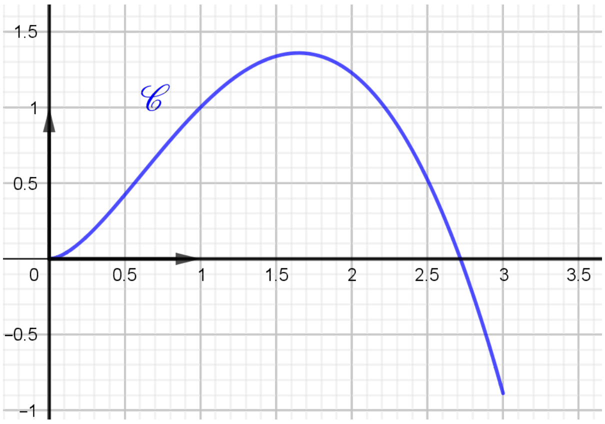
Exercice 1 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0;3] par : $f(x)=x^2(1-\ln(x))$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}$.



On admet que f est deux fois dérivable sur]0;3], on note f' sa fonction dérivée et on admet que sa dérivée seconde f'' est définie sur [0;3] par : $f''(x)=-1-2\ln(x)$.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Sur]0;3], $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse :

a. e **b.** 2,72 **c.** $\frac{1}{2}e+1$

2. $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse :

a. e **b.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$ **c.** $\sqrt{e}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;3] on a :

a. $f'(x)=x(1-2\ln(x))$ **b.** $f'(x)=-\frac{2}{x}$ **c.** $f'(x)=-2$

4. Sur l'intervalle [1;3] :

a. f est convexe **b.** f est décroissante **c.** f' est décroissante

5. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e s'écrit :

a. $y=-x+e$ **b.** $y=-ex$ **c.** $y=-ex+e^2$

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;3], $f(x)=x^2(1-\ln(x))$.

1. **Réponse : a** e

   Justification non demandée

   $f(x)=0 \Leftrightarrow (\ x^2(1-\ln(x))$ et $0<x\leqslant 3\ ) \Leftrightarrow (\ 1-\ln(x)=0$ et $0<x\leqslant 3\ )$

   $1-\ln(x)=0$ et $\Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e$

   et e appartient à l'intervalle]0;3].

2. **Réponse : b** $\frac{1}{\sqrt{e}}$

   Justification non demandée

   On détermine le signe de la dérivée seconde de f.

   Pour tout no,bre réel x de l'intervalle]0;3] : $f''(x)=-1-2\ln(x)$

   $-1-2\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

   $-1-2\ln(x)>0 \Leftrightarrow -1>2\ln(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}>\ln(x) \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}}>x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}>x$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		3
f''(x)	‖	+	0	−	

   Le point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ de la courbe $\mathscr{C}$ est un point d'inflexion.

3. **Réponse : a** $f'(x)=x(1-\ln(x))$

   Justification non demandée

   $f(x)=x^2(1-\ln(x))$

   $(x^2)'=2x \qquad (1-\ln(x))'=-\frac{1}{x}$

   $f'(x)=2x(1-\ln(x))+x^2\times\left(-\frac{1}{x}\right)=2x-2x\ln(x)-x=x(1-2\ln(x))$.

4. **Réponse : c** f' est décroissante

   Justification non demandée

   Par lecture graphique, on peut affirmer que f n'est ni convexe ni décroissante sur [1;3].

   D'après la deuxième question ; on déduit que f'' est négative sur [1 ;3] et f' est décroissante sur [1;3].

5. **Réponse : c** $y=-ex+e^2$

   Justification non demandée

   $f(e)=0 \qquad f'(e)=e(1-2\ln(e))=-e$

   $y-0=-e(x-e) \Leftrightarrow y=-ex+e^2$