## Exercice 2 5 points

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à 0,001 près.

**Partie A**

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.
Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :
. 40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
. 20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
. 30 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.
On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les événements suivants :
. A : « l'employé fait partie du service A » ;
. B : « l'employé fait partie du service B » ;
. C : « l'employé fait partie du service C » ;
. T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».
On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité d'un événement E est notée P(E) et celle de E sa-chant F est notée $P_F(E)$.

**1.a.** Justifier que $P(A)=0,45$.
**1.b.** Donner $P_A(T)$.
**1.c.** Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.
**2.** Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.
**3.** Montrer que $P(T)=0,482$.
**4.** Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.
**5.** On choisit successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise. On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement 2 d'entre eux résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail.

**Partie B**

Soit X la variable aléatoire qui , à chaque employé en France, associe son temps de transport quotidien, en mi-mutes, entre son domicile et l'entreprise. Une enquête montre que X suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart-type 10.

**1.** Calculer la probabilité que le trajet dure entre 20 minutes et 40 minutes.
**2.** Déterminer $P(X>50)$.
**3.** À l'aide de la méthode de votre choix, déterminer une valeur approchée du nombre a à l'unité près, tel que $P(X>a)=0,2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie C**

Cette entreprise souhaite faire une offre de transport auprès de ses employés. Un sondage auprès de quelques employés est effectué afin d'estimer la proportion d'employés dans l'entreprise intéressés par cet offre de transport. On souhaite ainsi obtenir un intervalle de confiance d'amplitude strictement inférieure à 0,15 avec un niveau de confiance de 0,95. Quel est le nombre minimal d'employés à consulter ?

**CORRECTION**

**1.a.** L'effectif total de l'entreprise est : $450+230+320=1000$.
L'effectif de A est 450.
On choisit au hasard un employé de l'entreprise donc $P(A)=\dfrac{450}{1000}=$ **0,45.**

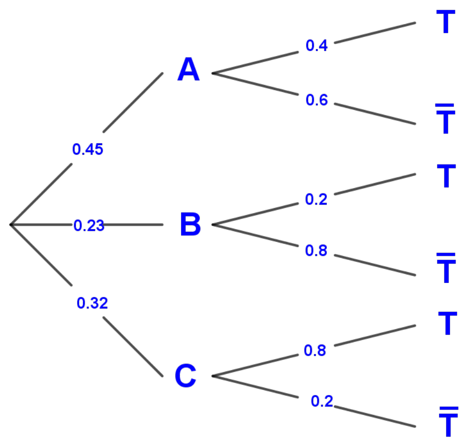
**1.b.** 40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc :
$P_A(T)=$ **0,4** et $P_A(\bar{T})=1-0,4=$ **0,6.**

**1.c.** De manière analogue, on obtient :

$P(B)=\dfrac{230}{1000}=$ **0,23** $\quad P_B(T)=$ **0,2** $\quad P_B(\bar{T})=$ **0,8.**

$P(C)=\dfrac{320}{1000}=$ **0,32** $\quad P_C(T)=$ **0,8** $\quad P_C(\bar{T})=$ **0,2.**

On obtient l'arbre pondéré :




**2.** On nous demande de calculer $P(A\cap T)$.
$P(A\cap T)=P(A)\times P_A(T)=0,45\times 0,4=$ **0,18.**

**3.** En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des Probabilités totales ;
$P(T)=P(A\cap T)+P(B\cap T)+P(C\cap T)=P(A)\times P_A(T)+P(B)\times P_B(T)+P(C)\times P_C(T)$
$P(T)=0,45\times 0,4+0,23\times 0,2+0,32\times 0,8=0,18+0,046+0,256=$ **0,482.**

**4.** On nous demande de calculer : $P_T(C)$
$P_T(C)=\dfrac{P(T\cap C)}{P(T)}=\dfrac{0,256}{0,482}=\dfrac{256}{482}=$ **0,531** à $10^{-3}$ près

**5.** On considère l'épreuve de Bernoulli :
On tire au hasard un employé de l'entreprise.
Succès $S=T$ la probabilité de succès $p=0,482$
Échec $\bar{S}=\bar{T}$ la probabilité de l'échec $q=0,518$
On effectue 5 tirages indépendants donc la variable aléatoire Y égale au nombre de succès en 5 épreuves suit la loi binomiale de paramètres n=5 et p=0,48.
On nous demande $P(Y=2)=\dbinom{5}{2}\ 0,482^2\times 0,518^3=$ **0,323** à $10^{-3}$ près.

**Partie B**

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 40 et d'écart-type 10.

**1.** En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(20 \leqslant X \leqslant 40) = 0{,}477$ à $10^{-3}$ près.
Remarque
$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0{,}955$ à $10^{-3}$ près.
$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu) = \dfrac{0{,}955}{2} = 0{,}477$ à $10^{-3}$ près.
Donc $P(40 - 2 \times 10 \leqslant X \leqslant 40) = P(20 \leqslant X \leqslant 40)$
On obtient $P(20 \leqslant x \leqslant 40) = 0{,}477$ à $10^{-3}$ près.

**2.** En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(X > 50) = 0{,}159$ à $10^{-3}$ près.
Remarque
$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0{,}683$
$P(X > \mu + \sigma) = \dfrac{1 - 0{,}683}{2} = \dfrac{0{,}317}{2} = 0{,}159$ à $10^{-3}$ près.
$P(X > 40 + 10) = P(X > 50) = 0{,}159$ à $10^{-3}$ près.

**3.** En utilisant la calculatrice, on obtient :
Pour $P(X > a) = 0{,}2$ on obtient : a=48,416.
On arrondit à l'unité : **a=48.**

**Partie C**

L'amplitude d'un intervalle de confiance pour un échantillon de taille $n > 0$ est : $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

On veut $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}15 \Leftrightarrow \dfrac{2}{0{,}15} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \dfrac{200}{15} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \dfrac{40}{3} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \dfrac{1600}{9} < n$

$\dfrac{1600}{9} = 177{,}77$ à $10^{-2}$ près et $n$ est un entier naturel

$\Leftrightarrow$ $178 < n$.

**Le nombre minimal d'employés à consulter est : 178.**