Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

En économie le résultat net désigne la différence entre la recette et les charges d'une entreprise sur une période donnée. Lorsqu'il est strictement positif, c'est un bénéfice.
Propriétaire d'une société Pierre veut estimer son résultat net à la fin de chaque mois.
À la fin du mois de janvier 2018, celui-ci était de 10 000 euros.
Pierre modélise ce résultat net par une suite (u_n) de premier terme $u_0=10000$ et de terme général tel que : $u_{n+1}=1{,}02\,u_n-500$ où n désigne le nombre de mois écoulés depuis janvier 2018.

1. Quel du résultat net réalisé à la fin du mois de mars 2018 ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n=u_n-25000$.

2.a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme a_0 et la raison.

2.b. Exprimer a_n en fonction de n et montrer que, pour tout entier naturel n,
$u_n=25000-15000\times 1{,}02^n$.

2.c. Résoudre l'inéquation $25000-15000\times 1{,}02^n > 0$ où n désigne un entier naturel.
Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

3. **À** l'aide d'un algorithme, Pierre souhaite déterminer le cumul total des résultats nets mensuelsde la société jusqu'au dernier mois où l'entreprise est bénéficiaire.
Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le nombre de mois pendant lesquels l'entreprise est bénéficiaire et la variable S le cumul total des résultats nets mensuels sur cette période.

```
U ← 10000
S ← 0
N ← 0
Tant que . . . .
        S . . . .
        U . . . .
        N . . . .
Fin Tant que
```

CORRECTION

1. $u_0=10000$ est le résultat net à la fin du mois de janvier 2018.
$u_1=1{,}02\,u_0-500=1{,}02\times10000-500=10200-500$ = 9700 € est le résultat net à a fin du mois de février 2018.
$u_2=1{,}02\times u_1-500=1{,}02\times9700-500=9894-500$ = **9394 €** est le résultat net à la fin du mois de mars 2018.

2. Pour tout entier naturel n, $a_n=u_n-25000$ donc $u_n=a_n+25000$.

2.a. Pour tout entier naturel n :
$a_{n+1}=u_{n+1}-25000=1{,}02\,u_n-500-25000=1{,}02(a_n+25000)-25500=1{,}02\,a_n+25500-25500$
$a_{n+1}=1{,}02\,a_n$.
(a_n) **est la suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme** $a_0=u_0-25000=10000-25000$ **= -15000.**

2.b. Pour tout entier naturel n :
$a_n=a_0\times q^n=-15000\times1{,}02^n$
donc $u_n=25000+a_n=25000-15000\times1{,}02^n$

2.c. $25000-15000\times1{,}02^n>0 \Leftrightarrow 25000>15000\times1{,}02^n \Leftrightarrow \dfrac{25000}{15000}>1{,}02^n \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}>1{,}02^n$
ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{5}{3}\right)>\ln(1{,}02^n) \Leftrightarrow \ln(5)-\ln(3)>n\times\ln(1{,}02)$
$1{,}02>1$ donc $\ln(1{,}02)>0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(5)-\ln(3)}{\ln(1{,}02)}>n$
$\dfrac{\ln(5)-\ln(3)}{\ln(1{,}02)}=25{,}8$ à 10^{-2} près et n est un entier naturel
$\Leftrightarrow 25\geqslant n$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égal à 25.

3. On complète l'algorithme

```
U ← 10000
S ← 0
N ← 0
Tant que N ≤ 25
        S= S+U
        U= 1.02xU-500
        N= N+1
Fin Tant que
```

. Remarque
Dans cet algorithme, on ne pas écrire : U ← $25000-15000\times1{,}02^N$
Pour pouvoir utiliser, cette formule, il faut alors intervertir les lignes U et N.

. On propose une programmation en Python, en ajoutant l'instruction : Afficher S.
On arrondit S à l'euro près.
Programme en Python

```
print('Début de programme')
U=10000
S=0
N=0
while N<=25:
    S=S+U
    U=1.02*U-500
    N=N+1
    B=round(S)
print("S="+str(B))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
S=144936
Fin de programme
>>>
```

On obtient **S= 144 936 €**

- En utilisant la deuxième formule et en inversant les lignes U et N.

Programme

```
print('Début de programme')
U=10000
S=0
N=0
while N<=25:
    S=S+U
    N=N+1
    U=25000-15000*1.02**N
    B=round(S)
print("S="+str(B))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
S=144936
Fin de programme
```

- Complément

$S=u_0+u_1+\ldots+u_{25} = (25000+a_0)+(25000+a_1)+\ldots+(25000+a_{25})=26\times 26000+(a_0+a_1+\ldots+a_{25})$

$S=26\times 25000-15000\times(1{,}02^0+1{,}02^1+\ldots+1{,}02^{25})$

s= $1{,}02^0+1{,}02^2+\ldots+1{,}02^{25}=\dfrac{1-102^{26}}{1-1{,}02}=\dfrac{1{,}02^{26}-1}{0{,}02}$ =33,670906 à 10^{-6} près

$-15000\times s=-505064$ à l'unité près

$S=26\times 25000-505064$ = **144936.**