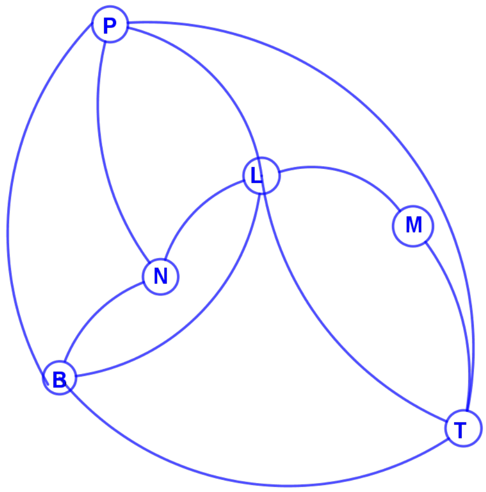
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises.
Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux(B), Lyon(L), Marseille(M), Nantes(N), Paris(P) et Toulouse(T).
Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaison autoroutières entre ces villes.



Partie A

1.a. Quel est l'ordre du graphe ?
1.b. Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.

2.a. On admet que le graphe est connexe.
Le journaliste envisage chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.
Est-ce possible ? Justifier la réponse.
2.b. Le journaliste va-t-il pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une est une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport ? Justifier la réponse.

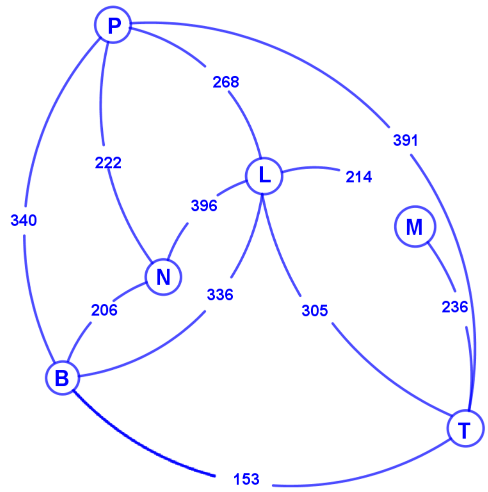
3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant rangées dans l'ordre alphabétiques).
On donne :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

3.a. Recopier et compléter la matrice d'adjacence.
3.b. Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jours de s'arrêter dans une ville différente.
Déterminer le nombre de trajet possible.

Partie B

On a indiqué sur le graphe ci-après le temps nécessaire en minutes pour parcourir chacune des liaisons autoroutières.



Le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible à Marseille.
Déterminer un trajet qui minimise son temps de parcours.

CORRECTION

Partie A

1.a. Le graphe a 6 sommets donc **l'ordre du graphe est 6.**
1.b. **Le graphe n'est pas complet,** par exemple les sommets B et M ne sont pas reliés par une arête.

2.a. On nous demande si le graphe admet une chaîne eulérienne.
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le degré de tous les sommets est pair.
On détermine le degré de chaque sommet et on donne le résultat sous la forme d'un tableau.

Sommets	B	L	M	N	P	T
Degrés	4	5	2	3	4	4

Le graphe admet 2 (et seulement 2) sommets de degré impair donc le graphe admet au moins une chaîne eulérienne (les extrémités d'une chaîne eulérienne sont les 2 sommets de degré impair).
Le journaliste pourra parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.
Exemple (non demandé)
N – B – P – N – L – P – T – M - L – T - B – L

2.b. Le graphe n'admet pas de cycle eulérien car il existe 2 sommets de degré impair.
Donc le journaliste ne pourra pas parcourir une et une seule fois chacune des liaisons en partant de Paris et en revenant à Paris.

3.a. Pour la matrice G d'adjacence du graphe.
Il existe une arête reliant Bordeaux à Lyon donc on écrit 1 pour le coefficient première ligne et deuxième colonne et 1 pour le coefficient deuxième ligne et première colonne.
Il n'existe pas d'arête reliant Marseille à Marseille donc on écrit 0 pour le coefficient troisième ligne et troisième colonne.
Il n'existe pas d'arête reliant Paris à Marseille donc on écrit 0 pour le coefficient troisième ligne et cinquième colonne et 0 pour le coefficient cinquième ligne et troisième colonne.

$$G = \begin{array}{c} \\ B \\ L \\ M \\ N \\ P \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B & L & M & N & P & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

3.b.

$$G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

i et j sont des entiers naturels compris entre 1 et 6.
Le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne (ou le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne) est lr nombre de chaînes de longueur 3 reliant la $i^{\text{ème}}$ ville à la $j^{\text{ème}}$ ville.

Le nombre de trajets en 3 étapes de Paris à Marseille est le coefficient de la cinquième ligne et de la troisième colonne soit : 5.
Le journaliste à la possibilité de 5 trajets en 3 étapes pour aller de Paris à Marseille.
Remarque (résultat non demandé)
Les cinq trajets sont :
P – T – L – M
P – L – T – M
P – B – L – M
P – N - L – M
P – B – T – M

Partie B

On utilise l'algorithme de Dijkstra

N	B	L	P	T	M
0	∞	∞	∞	∞	∞
0(N)	206(N)	396(N)	222(N)	∞	∞
	206(N)	396(N)	222(N)	359(B)	∞
		396(N)	222(N)	359(B)	∞
		396(N)		359(B)	595(T)
		396(N)			595(T)
					595(T)

On obtient le trajet qui minimise le temps pour aller de Nantes à Marseille :
N – B – T – M.
La durée de ce trajet est : **595 min soit 9h55min.**