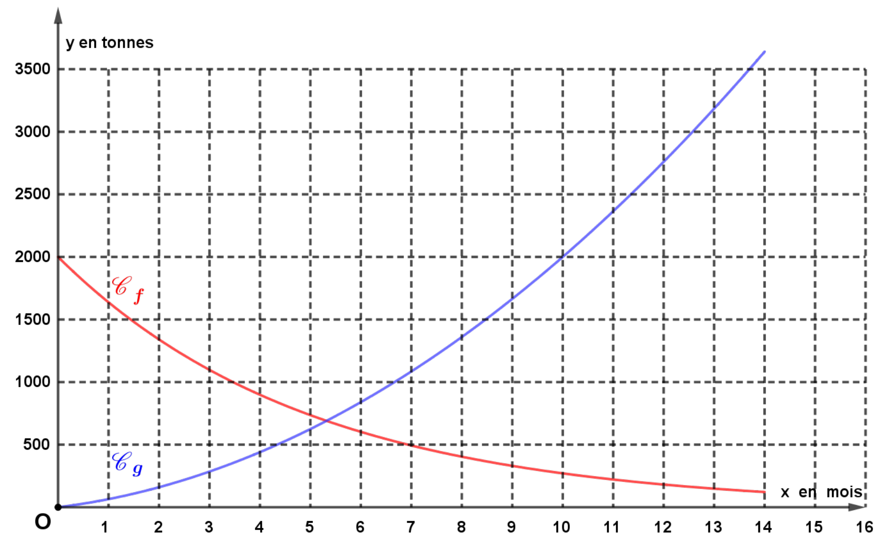
Exercice 4 — 5 points

Les parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par :

- la fonction f définie sur [0;14] par $f(x)=2000\,e^{-0,2x}$ pour le produit A ;
- la fonction g définie sur [0;14] par $g(x)=15x^2+50x$ pour le produit B, où x est la durée écoulée depuis le lancement du produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.



Partie A

Par lecture graphique, sans justification et avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.

2. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit B supérieure à 3000 tonnes.
Au bout de combien de mois cette quantité journalière sera atteinte ?

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;14], on pose $h(x)=f(x)+g(x)$.
On admet que la fonction h ainsi définie est dérivable sur [0;14].

1.a. Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?
1.b. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;14] :
$$h'(x)=-400\,e^{-0,2x}+30x+50\ .$$

2. On admet que le tableau de variation de la fonction h' sur l'intervalle [0;14] :

x	0	14
Varation de h'	-350 ↗	h'(14)=446

2.a. Justifier que l'équation $h'(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0;14] et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α .

2.b. En déduire les variations de la fonction h Sur l'intervalle [0;14].

3. Voici un algorithme :

```
Y ← - 400exp(-0.2X)+30X+50
Tant que Y ≤ 0
    X ← X+0.1
    Y ← - 400exp(-0.2X)+30X+50
Fin Tant que
```

3.a. Si la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, que contient la variable X après l'exécution de cet algorithme ?

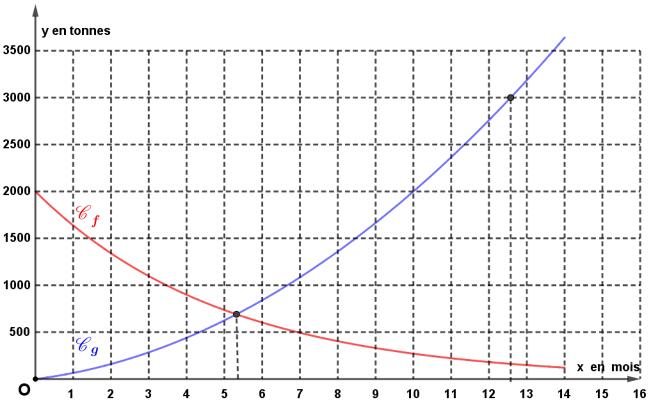
3.b. En supposant toujours que la variable X contient la valeur 3 avant exécution de cet algorithme, modifier l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à 0,001 prés de α après l'exécution de l'algorithme.

4.a. Vérifier qu'une primitive H de la fonction h sur [0;14] est :
$H(x)=-10000\,e^{-0,2x}+5x^3+25x^2$

4.b. Calculer une valeur approchée à l'unité près de $\frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx$.

4.c. Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION



1. On détermine graphiquement l'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on obtient : 5,3.
La durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A est 5mois et 9 jours.

2. On détermine l'abscisse du point de la courbe $\mathscr{C}_g$ ayant pour ordonnée 300, on obtient : 12,7.
La quantité journalière de produit B sera supérieure à 3000 t au bout de 12 mois et 21 jours.

Partie B

1.a. x est exprimé en mois.
h(x) est la quantité journalière totale, exprimée en tonnes, de produit A et B fabriquée pour x mois.

1.b. h est dérivable sur [0;14].
Pour tout x de l'intervalle [0;14] :
$h(x)=2000\,e^{-0,2x}+15x^2+50x$
$(e^{-0,2x})'=-0,2\,e^{-0,2x}$
$h'(x)=-2000\times(-0,2\,e^{-0,2x})+15\times(2x)+50=-400\,e^{-0,2x}+30x+50$.

2.a. h' est continue et strictement croissante sur [0;14] et 0 appartient à $h'(0);h'(14)]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $h'(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à [0:14].
En utilisant la calculatrice on obtient :
$h'(4)=-9,7 < 0$ et $h'(5)=52,8$ donc $4 < \alpha < 5$.
$h'(4,1)=-3,2 < 0$ et $h'(4,2)=3,3 > 0$ donc $4,1 < \alpha < 4,2$.

2.b. Si $0 \leqslant x < \alpha$ alors $h(x) < h(\alpha)=0$
Si $\alpha < x \leqslant 14$ alors $0=h(\alpha) < h(x)$
<u>Conséquence</u>
h est décroissante sur $[0;\alpha]$ et h est croissante sur $[\alpha;14^{\circ}]$

3.a. **La valeur contenue par la variable X est une valeur approchée à 0,1 près (par excès) de α .**
. On programme, en utilisant le logiciel Python l'algorithme.
<u>Programme</u>

```
print('début de programme')
from  math import*
X=3
Y=-400*exp(-0.2*X)+30*X+50
while Y<=0:
    X=X+0.1
    Y=-400*exp(-0.2*X)+30*X+50
print("X="+str(X))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
début de programme
X=4.2
Fin de programme
```

4,2 est une valeur approchée de α à 0,1 près.

3.b. Il suffit de modifier la ligne 3 de l'algorithme.

$X \leftarrow X + 0{,}001$

. On programme, en utilisant le logiciel Python, le nouvel algorithme.

Programme

```
print('début de programme')
from  math import*
X=3
Y=-400*exp(-0.2*X)+30*X+50
while Y<=0:
    X=X+0.001
    Y=-400*exp(-0.2*X)+30*X+50
print("X="+str(X))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
début de programme
X=4.148999999999994
Fin de programme
```

4,149 est une valeur approchée de α à 0,001 près.

4.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;14 :

$H(x) = -10000\,e^{-0{,}2x} + 5x^3 + 25x^2$

H est dérivable sur [0;4]

$H'(x) = -10000\times(-0{,}2\,e^{-0{,}2x}) + 5\times(3x^2) + 25\times(2x) = 2000\,e^{-0{,}2x} + 15x^2 + 50x = h(x)$

H est une primitive de h sur [0;14].

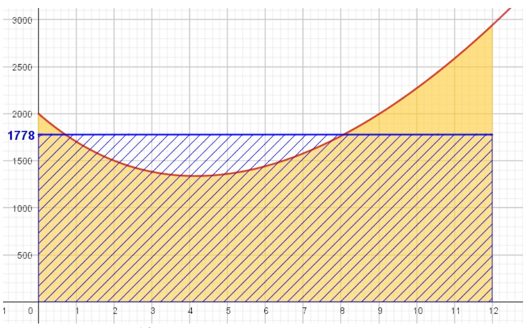
4.b. $\int_0^{12} h(x)\,dx = H(12) - H(0) =$

$\int_0^{12} h(x)\,dx = -10000\,e^{-2{,}4} + 5\times 12^3 + 25\times 12^2 - (-10000) = -10000\,e^{-2{,}4} + 8640 + 3600 + 10000$

$\frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx = \frac{22240 - 10000\,e^{-2{,}4}}{12} = 1778$ à l'unité près.

4.c. La moyenne de la quantité (en tonnes) de produits A et B fabriquée par jour pour les 12 mois est 1778 t.

Remarque (non demandé)



On a tracé la courbe représentative de h. $\int_0^{12} h(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine plan coloré en jaune et le rectangle hachuré en bleu à la même aire.

