Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

Au 1^er^ janvier 2018, madame DURAND dispose d'un capital de 16000€. Le 1^er^ juillet de chaque année, elle prélève 15% du capital disponible en prévision de ses vacances estivales.

Partie A

On modélise le montant du capital de madame Durand au 1^er^ janvier par une suite (u_n). Plus Précisément, si n est un entier naturel, u_n désigne le montant du capital de madame Durand disponible le 1^er^ janvier de l'année 2018+n.
On a donc $u_0=16000$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout n entier naturel.

3.a. Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant votre réponse.
3.b. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

4. À l'aide d'un algorithme, madame Durand souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel son capital devient inférieur ou égal à 2000 €.
4.a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le résultat attendu.

```
U ← . . .
N ← 0 . . .
Tant que U . . .
    N ← . . .
    U ← . . .
Fin Tant que
```

4.b. Quelle est la valeur numérique contenue par la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Partie B

Cherchant à anticiper la diminution de son capital disponible, madame Durand décide d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1^er^ décembre.
On note v_n la valeur du capital le 1^er^ janvier de l'année 2018+n. On a ainsi $v_0=16000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}=0{,}85\,v_n+300$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n=v_n-2000$.
2.a. Calculer w_0.
2.b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,85.
2.c. En déduire que, pour tout entier n, $v_n=2000+14000\times 0{,}85^n$

3. En s'y prenant ainsi, madame Durand espère toujours disposer d'un capital supérieur à 2500 €.
A-t-elle raison ?

<u>CORRECTION</u>

Partie A

1. Au 1er janvier 2018 le capital de madame Durand est $u_0=16000$.

Au 1er juillet 2018 madame Durand prélève 15 % de son capital soit : $16000\times\frac{15}{100}=160\times15=2400$.

Au 1er janvier 2019 le capital de madame Durand sera :
$u_1=16000-2400$ = **13600.**

. Au 1er juillet 2019 madame Durand prélève $13600\times\frac{15}{100}=136\times15=2040$.

Au 1er janvier 2019 le capital de madame Durand sera :
$u_2=13600-2040$ = **11560.**

2. Pour tout entier naturel n :
au 1er janvier 2018+n madame Durand dispose d'un capital de u_n (€) ;
au 1er janvier 2018+n+1 madame Durand dispose d'un capital de u_{n+1} (€)
au 1er juillet 2018+n madame Durand prélève $\frac{15}{100}\times u_n = 0{,}15\,u_n$
donc $u_{n+1}=u_n-0{,}15\,u_n=0{,}85\,u_n$.
La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=16000$ et de raison $q=0{,}85$.
Pour tout entier naturel n :
$u_n=u_0\times q^n=16000\times0{,}85^n$.

3.a. $0 < 0{,}85 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
3.b. Dans le futur, **le capital de madame Durand deviendra nul.**

4.a.

```
U ← 16000
N ← 0
Tant que U > 2000
    N ← N+1
    U ← 0.85xU
Fin Tant que
```

4.b. En utilisant la calculatrice par balayage, on obtient :
$u_{12}=2275{,}87$ à 10^{-2} près $u_{13}=1934{,}49$ à 10^{-2} près
<u>Conclusion</u>
N=13 au 1er janvier 2018+13=2031 **le capital de madame Durand sera inférieur à 2000 € .**

. En effectuant la résolution de l'inéquation $0{,}85^n>2000$
ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
$16000\times0{,}85^n>2000 \Leftrightarrow \ln(16000\times0{,}85^n)<\ln(2000) \Leftrightarrow \ln(16000)+\ln(0{,}85^n)>\ln(2000)$
$\Leftrightarrow n\times\ln(0{,}85)>\ln(2000)-\ln(16000)$
$0 < 0{,}85 < 1$ donc $\ln(0{,}85) < 0$
$\Leftrightarrow n < \frac{\ln(2000)-\ln(16000)}{\ln(0{,}85)} = 12{,}80$ à 10^{-2} près et n est un entier naturel.
Si $n \leqslant 12$ alors $u_n < 2000$ et $u_{13} \leqslant 2000$
<u>Conclusion</u>
N = 13

. On peut programmer l'algorithme en Python.

Programme en Python

```
print('Début de programme')
U=16000
N=0
while U>2000:
    N=N+1
    U=0.85*U
print("N="+str(N))
print('Fin de programme')
```

Exécution

```
Début de programme
N=13
Fin de programme
```

Partie B

1. Au 1^{er} janvier 2018 le capital de madame Durand est $v_0=16000$ €.

Au 1^{er} juillet 2018 madame Durand prélève : $\frac{15}{100}\times 16000=0{,}15\times 16000=2400$ €.

Au 1^{er} décembre 2018 madame Durand ajoute 300 € au capital.

Au 1^{er} janvier 2019 le capital de madame Durand est : $v_1=16000-2400+300=15300$ €

. Pour tout entier naturel n :

Au 1^{er} janvier 2018+n le capital de madame Durand est : v_n.

Au 1^{er} juillet 2018+n madame Durand prélève $\frac{15}{100}\times v_n=0{,}15\,v_n$.

Au 1^{er} décembre 2018+n madame Durand ajoute 300 € au capital.

Au 1^{er} janvier 2018+n+1 le capital de madame Durand est : $v_{n+1}=v_n-0{,}15\,v_n+300=0{,}85\,v_n+300$.

2. Pour tout entier naturel n : $w_n=v_n-2000$ donc $v_n=w_n+2000$.

2.a. $w_0=v_0-2000=16000-2000=14000$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$w_{n+1}=v_{n+1}-2000=0{,}85\,v_n+300-2000=0{,}85(w_n+2000)-1700=0{,}85\,w_n+1700-1700$

$w_{n+1}=0{,}85\,w_n$

(w_n) est la suite géométrique de raison q=0,85 et de premier terme $w_0=14000$.

2.c. Pour tout entier naturel n :

$w_n=w_0q^n=14000\times 0{,}85^n$

3. $\lim_{n\to+\infty} 0{,}85^n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n=2000$.

Le capital de madame Durand deviendra donc inférieur à 2500 €.

Remarque

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$v_{20}=2542{,}63$ donc $v_{21}=2461{,}24$.

Au 1^{er} janvier 2018+21=2,039 le capital de madame Durand sera inférieur à2500 €.-