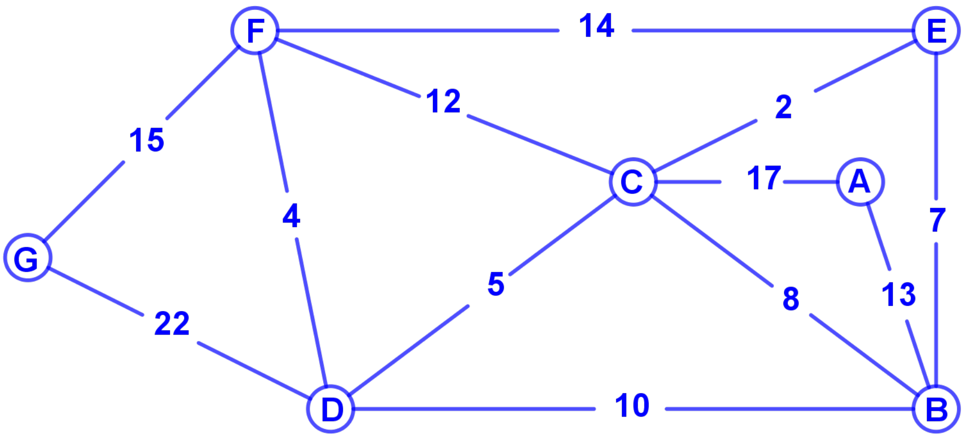
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

En vacances, Assan et Chloé projettent de visiter sept sites touristiques et se sont procurés le plan des sentiers reliant ces sites.
Ci-dessous, ils ont représenté ce plan par un graphe connexe pondéré par le temps de parcours en minutes séparant les lieux de visites notés A, B, C, D, E, F et G.



Partie A

1. Est-il possible, pour Assan et Chloé, d'effectuer un trajet empruntant une et une seule fois tous les sentiers ? Justifier votre réponse.

2. Déterminer, par la méthode de votre choix, le trajet le plus coutf lesur le site G ur permettant de relier la station A à la station G en précisant le temps de parcours.

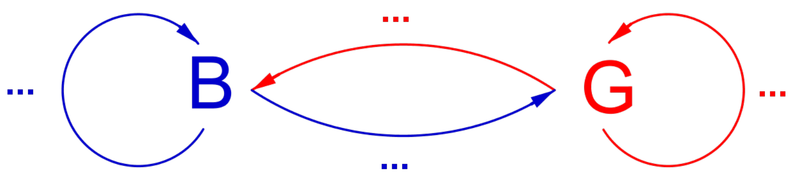
Partie B

Sur le sites B et G l'office du tourisme loue des audio-guides que les visiteurs peuvent rendre sur l'un ou l'autre des deux sites à la fin de la journée. Une étude a mis en évidence que chaque jour :
. 10 % des audio-guides loués sur le site B sont rendus sur le site G, les autres étant rendus sur le site B ;
. 15 % des audio-guides loués sur le site G sont rendus sur le site B, les autres étant rendus sur le site G.

On étudie l'évolution de la répartition des audio-guides sur les deux sites.
Pour tout entier naturel non nul n :
. on note b_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site B à la fin de la $n^{\text{ième}}$ journée,
. on note g_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site G à la fin de la $n^{\text{ième}}$ journée.

À l'ouverture de la saison , il y a autant d'audio-guides sur le site B que sur le site G.
Pour tout entier naturel non nul, on note $P_n = \begin{pmatrix} b_n & g_n \end{pmatrix}$ la matrice de l'état probabiliste à la fin de la $n^{\text{ième}}$ journée.
On rappelle que $b_n + g_n = 1$.
On pose $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

1. Recopier et compléter le graphe probabiliste suivant :



2. Donner la matrice de transition M associée au graphe.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1}=P_n M$.
3.a. Calculer P_2 . On approchera les valeurs à 10^{-3} près
3.b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Dans la suite, on admettra que pour tout entier naturel n, on a : $b_{n+1}=0{,}75\,b_n+0{,}15$.

4. Parmi les quatre propositions suivantes , une seule fournit, pour tout entier n, l'expression de b_n .
Préciser laquelle et justifier votre réponse :

a. $b_n=-0{,}1\times 0{,}75^n+0{,}6$
b. $b_n=-0{,}6\times 0{,}75^n+0{,}1$
c. $b_n=0{,}1\times 0{,}75^n+0{,}6$
d. $b_n=-0{,}1\times 0{,}75^n-0{,}6$

5. La personne chargée de la gestion des audio-guides prétend que le site G accueillera un jour moins de 35 % des audio-guides.
Qu'en pensez vous ? Justifier votre réponse.

CORRECTION

Partie A

1. On nous demande si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de chaque sommet et on donne le résultat sous forme de tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	5	4	3	4	2

Le graphe admet 2 (et seulement 2) sommets de degré impair donc le graphe admet au moins une chaîne eulérienne (les extrémités d'une chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair).
Exemple
E-F-C-D-F-G-D-B-A-C-B-E-C

2. On utilise l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le plus court chemin pour aller de A à G.
Dans le tableau on place les sommets dans l'ordre alphabétique.

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	13(A)	17(A)	∞	∞	∞	∞
	13(A)	17(A)	23(B)	20(B)	∞	∞
		17(A)	22(C)	19(C)	29(C)	∞
			22(C)	19(C)	29(C)	∞
			22(C)		26(D)	44(D)
					26(D)	41(F)
						41(F)

On obtient **A-C-D-F-G** comme plus court chemin pour aller de A à G de **41 minutes.**

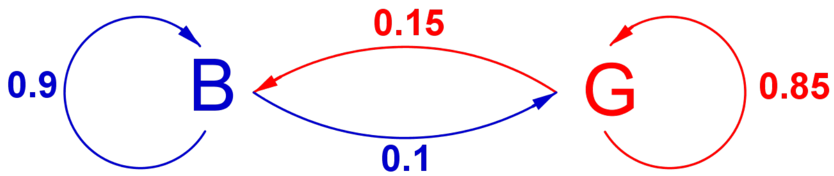
Partie B

1. On note :
B : l'état « l'audio-guide est rendu au site B »
G : l'état « l'audio-guide est rendu au site G ».
B et G sont les 2 sommets du graphe probabiliste.

. 10 % des audio-guides loués au site B sont rendus sur le site G, les autres (90%) sont rendus au site B.
Conséquences
Le poids de l'arête BG est 0,1.
Le poids de l'arête BB est 0,9.

. 15 % des audio-guides loués sur le site G sont rendus au site B, les autres (85%) sont rendus au site G.
Conséquences
Le poids de l'arête GB est 0,15.
Le poids de l'arête GG est 0,85.

. On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.
Dans cet exercice on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe probabiliste est M= $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête BB : 0,9
m_{12} est le poids de l'arête BG : 0,1
m_{21} est le poids de l'arête GB : 0,15
m_{22} est le poids de l'arête GG : 0,85
M= $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

3. $P_1 = P_0 M$ On peut utiliser la calculatrice pour obtenir le résultat.
$P_1 = (0,5 \quad 0,5)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,5 \times 0,9 + 0,5 \times 0,15 \quad 0,5 \times 0,1 + 0,5 \times 0,85)$
$P_1 = (0,45 + 0,075 \quad 0,05 + 0,425) = (0,525 \quad 0,475)$
$P_2 = P_1 M = (0,525 \quad 0,475)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,54375 \quad 0,45625)$ (en utilisant la calculatrice).
$P_2 = (0,544 \quad 0,456)$ (coefficients à 10^{-3} près).

4. Pour tout entier naturel n : $b_{n+1} = 0,75\, b_n + 0,15$.
Réponse a : $b_n = -0,1 \times 0,75^n + 0,6$
Justification
car $b_0 = 0,5$ et :
$-0,1 \times 0,75^0 + 0,6 =$ **0,5**
$-0,6 \times 0,75^0 + 0,1 =$ -0,5
$0,1 \times 0,75^0 + 0,6 = 0,7$
$-0,1 \times 0,75^0 - 0,6 =$ -0,7

5. Pour tout entier naturel n, $b_n = -0,1 \times 0,75^n + 0,6$ donc $b_n < 0,6$.
On a : $g_n + b_n = 1$ soit $g_n = 1 - b_n$ et $g_n > 0,4$.
La personne chargée de la gestion a tord car au moins 40 % des audio-guides seront rendus au site G.

