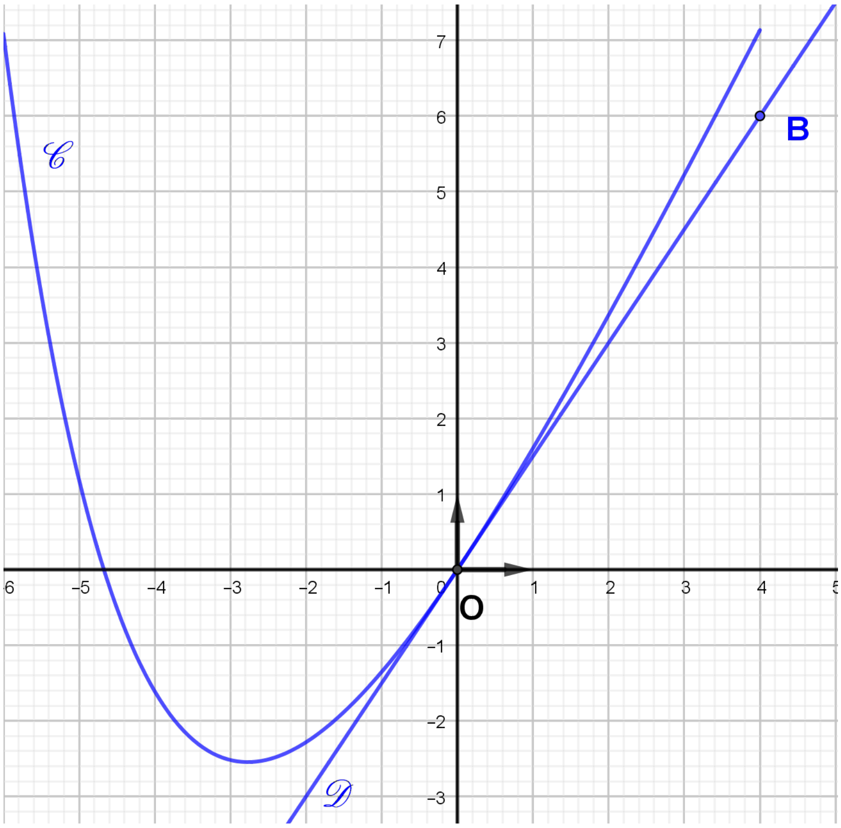
Exercice 4 — 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [-6;4] et dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle [-6;4].
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde sur l'intervalle [-6;4].



On a représenté $\mathscr{D}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
La droite $\mathscr{D}$ passe par l'origine du repère et par le point B(4;6).

1. Avec la précision permise par le graphique :
1.a. donner la valeur de f(0) ;
1.b. donner la valeur de $f'(0)$;
1.c. conjecturer la convexité de la fonction f sur l'intervalle [-6;4].

2. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle [-6;4] et que son expression est :

$$f(x)=2x+1+e^{-\frac{1}{2}x}$$

2.a. Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle [-6;4].
2.b. Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est l'intervalle [-2ln(4);4].
2.c. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-6;4].
2.d. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle [-6;4].

3. Donner un encadrement au centième près de la solution non nulle de l'équation f(x)=0 sur l'intervalle [-6;4].
4. Démontrer la conjecture émise dans la partie 1.c.

5. Soit g la fonction définie sur l'intervalle [0;4] par : $g(x)=x^2-x-2e^{-\frac{1}{2}x}$
On admet que la fonction g est dérivable sur [0;4].
5.a. Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0;4].
5.b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0;4]
En donner une valeur approchée à 0,01 près.

CORRECTION

1.a. La courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine donc f(0)= **0.**

1.b. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ à l'origine soit la droite $\mathscr{D}$ passant par le B(4;6).

$$f'(0)=\frac{6-0}{4-0}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\mathbf{1{,}5.}$$

1.c. La courbe est au dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle [-6;4] donc on peut conjecturer que : **f est convexe sur [-6;4].**

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-6;4] : $f(x)=2x-1+e^{-\frac{1}{2}x}$

2.a. $(e^u)'=u'e^u$ $\quad \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-6;4] : $f'(x)=2-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$.

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-6;4] :

$$f'(x)\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\geqslant\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \quad \Leftrightarrow \quad 4\geqslant e^{-\frac{1}{2}x}$$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(4)\geqslant\ln\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(4)\geqslant-\frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad -2\ln(4)\leqslant x$$

<u>Conclusion</u>

$$f'(x)\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\ln(4)\leqslant x\leqslant 4$$

2.c. $f'(x)\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6\leqslant x\leqslant -2\ln(4)$

$f(-6)=-13+e^3=7{,}09$ **à** 10^{-2} près.

$f(4)=7+e^{-2}=7{,}14$ à 10^{-2} près.

$f(2\ln(4))=-4\ln(4)-1+4=3-4\ln(4)=-2{,}55$ à 10^{-2} près.

x	-6		-2ln(4)		4
f '(x)		–	0	+	
f(x)	$-13+e^3$	↘	3-4ln(4)	↗	$7+e^{-2}$

2.d. f est continue et strictement décroissante sur $[-6;-2\ln(4)]$.
0 appartient à l'intervalle $[f(-2\ln(4));f(-6)]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique appartenant à l'intervalle [-6;-2ln(4)].
f est continue et strictement croissante sur [-2ln(4);-4].
0 appartient à l'intervalle [f(-2ln(4);f(4)] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique appartenant à l'intervalle [-2ln(4);4] or f(0)=0 donc cette solution est 0.

<u>Conclusion</u>

L'équation f(x)=0 admet 2 solutions : 0 et une solution α appartenant à [-6;-2ln(4)].

3. f(-5)=1,82 > 0 et f(-4)=-1,61 < 0 donc $-5<\alpha<-4$
f(-4,7)=0,09 > 0 et f(-4,6)=-0,23 < 0 donc $-4{,}7<\alpha<-4$
f(-4,68)=0,02 > 0 et f(-4,67)= -0,01 < 0 donc $-4{,}68<\alpha<-4{,}67$.

4. Pour tout nombre réel x de [-6;4] :

$$f'(x)=2-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}>0$$

donc **f est convexe sur [-6;4].**

5. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;4] :

$$g(x)=x^2-x-2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

5.a. $g'(x)=2x-1-\frac{1}{2}\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)=2x-1+e^{-\frac{1}{2}x}=f(x)$

donc **g est une primitive de f sur [0;4].**

5.b. La valeur moyenne de f sur [0;4] est :

$$\mu=\frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{4}(g(4)-g(0))=\frac{1}{4}(16-4-2e^{-2}+2e^0)=\frac{1}{4}(14-2e^{-2})=3{,}5-0{,}5e^{-2}$$

$\mu=3{,}43$ à 10^{-2} près.