Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8\,u_n+18$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n=u_n-90$

2.a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.
On précisera la valeur de v_0 .

2.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n=90-25\times 0{,}8^n$.

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	u ← 65
ligne 2	n ← 0
ligne 3	Tant que . . . .
ligne 4	n ← n+1
ligne 5	u ← 0.8xu+18
ligne 6	Fin Tant que

3.a. Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.

3.b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

3.c. Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geqslant 85$.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52€ par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.
En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.
Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés.
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement

4.a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au $n^{\text{ième}}$ mois qui suit le mois de juillet 2017.

4.b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4420€ durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

4.c. Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ? Argumenter la réponse.

CORRECTION

(u_n) est la suite définie par $u_0=65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,8\,u_n+18$.

1. $u_1=0,8\,u_0+18=0,8\times65+18=52+18=$ **70.**

$u_2=0,8\,u_1+18=0,8\times70+18=56+18=$ **74.**

2. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-90$ donc $u_n=90+v_n$.

2.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-90=0,8\,u_n+18-90=0,8(v_n+90)-72=0,8\,v_n+72-72=0,8\,v_n$

$v_0=u_0-90=65-90=-25$.

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme $v_0=-25$.

2.b. Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times q^n=-25\times0,8^n$

donc $u_n=90-25\times0,8^n$.

3.a.

```
ligne 1   u ← 65
ligne 2   n ← 0
ligne 3   Tant que  u<85
ligne 4        n ← n+1
ligne 5        u ← 0.8xu+18
ligne 6   Fin Tant que
```

3.b. On effectue les calculs en utilisant la calculatrice et on donne les résultats sous la forme d'un tableau. On arrondit à 10^{-2} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	65	70	74	77.2	79.76	81.81	83.85	84.76	85.81

À la fin de l'exécution de l'algorithme, on obtient n = 8.

3.c. $u_n \geqslant 85 \Leftrightarrow 90-25\times0,8^n \geqslant 85 \Leftrightarrow 5 \geqslant 25\times0,8^n \Leftrightarrow \frac{5}{25} \geqslant 0,8^n \Leftrightarrow 0,2 \geqslant 0,8^n$

ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \ln(0,2) \geqslant \ln(0,8^n) \Leftrightarrow \ln(0,2) \geqslant n\times\ln(0,8)$

$0 < 0,8 < 1$ donc $\ln(0,8) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)}=7,21$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc **le plus petit entier naturel n tel que** $u_n \geqslant 85$ **est n=8.**

Complément (non demandé)

On peut programmer l'algorithme précédent en utilisant le logiciel Python (et en ajoutant une ligne 7 : Afficher : n.).

Programme en Python

```python
print('Début de programme')
u=65
n=0
while u<85:
    n=n+1
    u=0.8*u+18
    print("n="+str(n),"u="+str(u))
print('Fin de programme')
```

Exécution du programme

```
Début de programme
n=1 u=70.0
n=2 u=74.0
n=3 u=77.2
n=4 u=79.76
n=5 u=81.808
n=6 u=83.44640000000001
n=7 u=84.75712000000001
n=8 u=85.80569600000001
Fin de programme
```

4.a. Soit (w_n) la suite permettant de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le $n^{\text{ième}}$ mois qui suit le mois de juillet 2017.

$w_0=65$.

L'énoncé précise que d'un mois sur l'autre 20 % des abonnements sonr résiliés et 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement donc pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1}=w_n-\frac{20}{100}\times w_n+18=0,8\,w_n+18.$$

Conséquence

Pour tout entier naturel n : $w_n=u_n$

4.b. Pour tout entier naturel n : $u_n=90-25\times 0,8^n$.

La recette mensuelle du $n^{\text{ième}}$ mois après juillet 2017 est :

$S_n=52\times(90-25\times 0,8^n)=4680-1300\times 0,8^n$

$$S_n \geqslant 4420 \Leftrightarrow 4680-4420 \geqslant 1300\times 0,8^n \Leftrightarrow 260 \geqslant 1300\times 0,8^n \Leftrightarrow \frac{260}{1300} \geqslant 0,8^n$$

$\Leftrightarrow 0,2 \geqslant 0,8^n$

ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0,2)\geqslant \ln(0,8^n) \Leftrightarrow \ln(0,2) \geqslant n\times\ln(0,8)$

$0 < 0,8 < 1$ donc $\ln(0,8) < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} \leqslant n \text{ or } \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)}=7,21 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel donc $8 \leqslant n$

Conclusion

À partir de mars 2018, la recette mensuelle de la société Biocagette dépassera 4420€.

4.c. $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0,8^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n=90$

$\lim_{n\to+\infty} S_n=90\times 52=4680$

Conclusion

Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette tend vers 4680 €.