

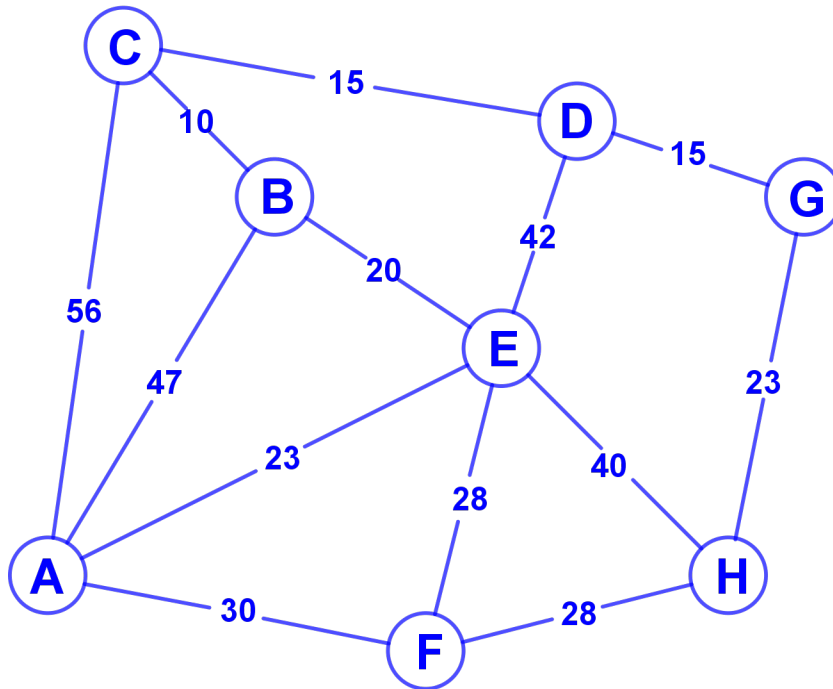
Exercice 3 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Le graphe ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour, le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail.

Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.

Partie B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis Décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

- S'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de 0,53.
- S'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement avec en transport commun une probabilité de 0,78.

Louis Décide de mettre en place ces résolutions au 1^{er} janvier 2018

Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018.
- t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018 .

La matrice ligne $P_n = (c_n \quad t_n)$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018 .

Le 1^{er} janvier 2018 , Louis décide d'utiliser le covoiturage.

- 1.a. Préciser l'état probabiliste initial P_0 .
- 1.b. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On notera « C » et « T » ses deux sommets.
 - . « C » pour indiquer que Louis utilise le covoiturage.
 - . « T » pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.
2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
4. Soit la matrice $P = (x \quad y)$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.
 - 4.a. Calculer les valeurs exactes de x et y puis en donner une valeur approchée à 0,01 près.
 - 4.b. Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ?
Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	H	G
0(A)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	47(A)	56(A)	∞	23(A)	30(A)	∞	∞
	43(E)	56(A)	65(E)	23(A)	30(A)	63(E)	∞
	43(E)	56(A)	65(E)		30(A)	58(F)	∞
	43(E)	56(A)	65(E)			58(F)	∞
		56(A)	65(E)			58(F)	∞
			65(E)			58(F)	81(H)
			65(E)				80(E)
							80(E)

Le chemin le plus court est A-E-D-G de longueur 80 km.

Partie B

1.a. Le 1^{er} janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage donc $c_0=1$ et $t_0=0$.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.b. On note :

C l'état : « Louis utilise le covoiturage »

T l'état : « Louis utilise les transports en commun ».

C et T sont les sommets du graphe probabiliste

- Si Louis a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de 0,53 donc il utilisera les transports en commun avec une probabilité de $1-0,53=0,47$.

Conséquences

Le poids de l'arête TC est 0,53.

Le poids de l'arête TT est 0,47.

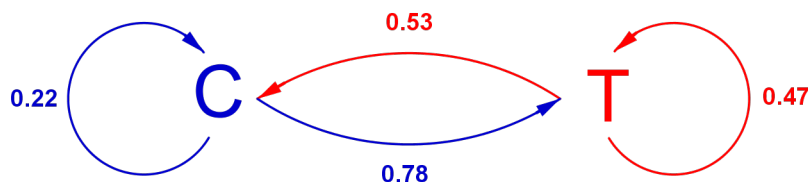
- Si Louis a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transports en commun avec une probabilité de 0,78 donc il utilisera le covoiturage avec une probabilité de $1-0,78=0,22$.

Conséquences

Le poids de l'arête CT est 0,78.

Le poids de l'arête CC est 0,22.

- On obtient l'arbre probabiliste :



2. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique

Dans cet exercice on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe probabiliste est $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête CC : 0,22

m_{12} est le poids de l'arête CT : 0,78

m_{21} est le poids de l'arête TC : 0,53

m_{22} est le poids de l'arête TT : 0,47

$$M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$$

$$3. P_1 = P_0 M = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = (0,22 \ 0,78)$$

$$P_2 = P_1 M = (0,22 \ 0,78) \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = (0,22 \times 0,22 + 0,78 \times 0,53 \quad 0,22 \times 0,78 + 0,78 \times 0,47)$$

$$P_2 = (0,4618 \ 0,5382)$$

Le 3 janvier 2018, pour son déplacement, Louis utilise le covoiturage avec une probabilité de 0,4618 ou les transports en commun avec une probabilité de 0,5382.

4.a. La matrice ligne $P = (x \ y)$ est la matrice associée à l'état stable du graphe probabiliste si et seulement si

$$\begin{cases} PM = P \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$PM = P \Leftrightarrow (x \ y) \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = (x \ y) \Leftrightarrow \begin{cases} 0,22x + 0,53y = x \\ 0,78x + 0,47y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,78x + 0,53y = 0 \\ 0,78x - 0,53y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 78x - 53y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } x + y = 1$$

$$78x - 53(1-x) = 0 \Leftrightarrow 131x = 53 \Leftrightarrow x = \frac{53}{131}$$

$$78(1-y) - 53y = 0 \Leftrightarrow 78 = 131y \Leftrightarrow y = \frac{78}{131}$$

La matrice ligne associée à l'état stable du graphe probabiliste est $P = \left(\frac{53}{131} \quad \frac{78}{131} \right)$.

$$x = \frac{53}{131} = 0,40 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \quad y = \frac{78}{131} = 0,60 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

4.b. À long terme la probabilité que Louis utilise le covoiturage pour ses déplacements est 0,4 et la probabilité qu'il utilise les transports en commun est 0,6.

Conséquence

À long terme Louis utilisera plus souvent les transports en commun que le covoiturage.