Exercice 4 — 5 points

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à 0,01 près.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0;4] par :
$f(x)=(3,6x+2,4)e^{-0,6x}-1,4$.

Partie A

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [0;4] et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;4] on a :
$f'(x)=(-2,16x+2,16)e^{-0,6x}$

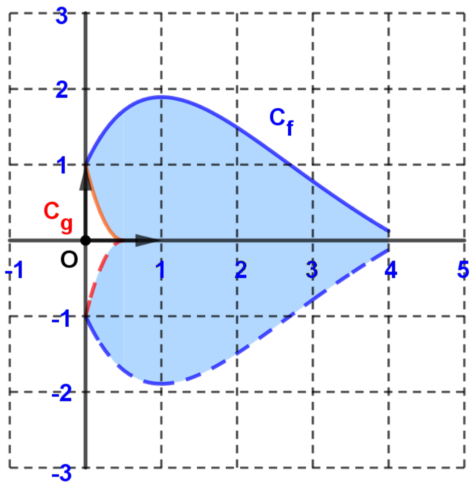
2.a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0;4].

2.b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.

3. On admet que la fonction F définie par : $F(x)=(-6x-14)e^{-0,6x}-1,4x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0;4].
Calculer la valeur exacte de $\int_0^4 f(x)\,dx$ puis en donner une valeur numérique approchée.

Partie B

On note C_f la courbe représentative de f sur l'intervalle [0;4].
On considère la fonction g définie par : $g(x)=4x^2-4x+1$.
On note C_g la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle [0;0,5].
On a tracé ci-dessous les courbes C_f et C_g dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de C_f et C_g par rapport à l'axe des abscisses :



1. Montrer que $\int_0^{0,5} g(x)\,dx=\frac{1}{6}$.

2. On considère le domaine plan délimité par les courbes C_f, C_g, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation x=4.
Ce domaine apparaît coloré sur la figure ci-dessus.
Calculer une valeur approchée de l'aire, en unité d'aire, de ce domaine.

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;4] : $f(x)=(3,6x+2,4)e^{-0,6x}-1,4$

1. f est dérivable sur [0;4]

$(e^u)'=u'e^u \qquad (e^{-0,6x})'=-0,6e^{-0,6x}$

$f'(x)=3,6\times e^{-0,6x}+(3,6x+2,4)(-0,6e^{-0,6x})=(-3,6\times 0,6x-2,4\times 0,6+3,6)e^{-0,6x}$

$f'(x)=(-2,16x-1,44+3,6)e^{-0,6x}=(-2,16x+2,16)e^{-0,6x}$

2.a. Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;4] $e^{-0,6x}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (-2,16x+2,16)/

-2,16x+2,16=0 ⇔ x=1

-2,16x+2,16 >0 ⇔ x< 0

f(0)=1 $\quad f(1)=6\times e^{-0,6}-1,4=1,89$ à 10^{-2} près $\quad f(4)=16,8\times e^{-2,4}-1,4=0,12$ à 10^{-2} près.

2.b. Tableau de variation

x	0		1		4
f '(x)		+	0	—	
f(x)	1	↗	1.89	↘	0.12

3. On admet que la fonction F définie par $F(x)=(-6x-14)e^{-0,6x}-1,4x$ est une primitive de f sur [0;4].

$\int_0^4 f(x)\,dx = F(4)-F(0) = (-24-14)e^{-2,4}-5,6-(-14e^0) = 8,4-38e^{-2,4} =$ **4,95 à 10^{-2} près.**

Partie B

1. $g(x)=4x^2-4x+1$

La fonction G définie sur [0;4] par $G(x)=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x$ est une primitive de g sur [0;4].

$\int_0^{0,5} g(x)\,dx = G(0,5)-G(0) = G\left(\frac{1}{2}\right)-G(0)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

2. Le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est orthonormé.

L'aire, en unité d'aire,du domaine situé au dessus de l'axe des abscisses et au dessus de C_g et en dessous de C_f sur [0;4] est : $\int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^{0,5} g(x)\,dx = 8,4-38e^{-2,4}-\frac{1}{6}$ U.A.

Les courbes, en pointillés, sont les symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc l'aire,en unité d'aire du domaine coloré est : $\mathscr{A}= 2\left(8,4-38e^{-2,4}-\frac{1}{6}\right)$ = **9,57 U.A.**