Continuité sur un intervalle.

1. Continuité d'une fonction

1.1. Continuité en un point

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f, et soit a un réel appartenant à D_f.
On dit que f est **continue** en a lorsque $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$

Exemple

$f(x)=x^2$ est continue en 2 puisque $\lim_{x \to 2} f(x) = 2^2 = f(2)$
Plus généralement, $f(x)=x^2$ est continue en toute valeur a réelle, puisque $\lim_{x \to a} f(x) = a^2 = f(a)$.

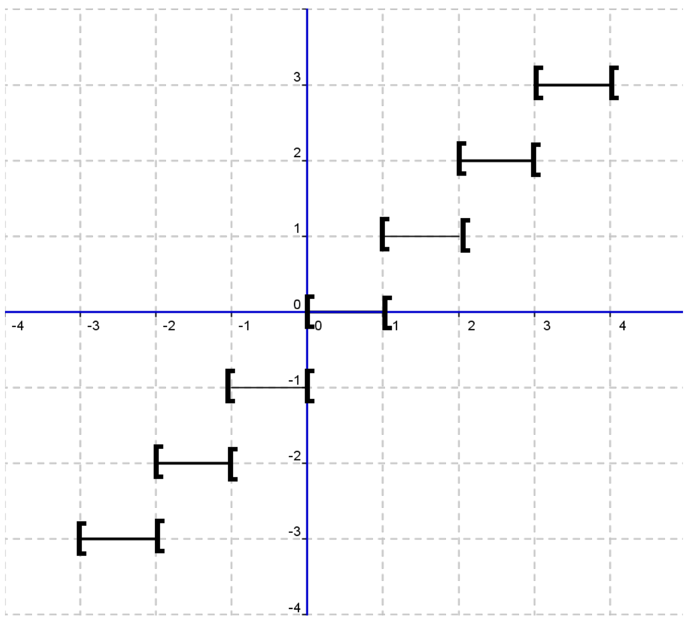
1.2. Cas particulier à connaître : la fonction partie entière

Définition : La **fonction partie entière** est définie sur ℝ par $x \longmapsto E(x)$
$E(x)$ étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

E(2,3)=2 E(0,15)=0 E(−0,7)=−1 E(−3,3)=−4

Proposition: Soit n un entier relatif. Si $x \in [n; n+1[$, alors $E(x)=n$.

Démonstration : C'est une application directe de la définition :
si $x \in [n; n+1[$, alors le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x est n, donc $E(x)=n$.



Proposition: La fonction partie entière **n'est pas continue en 1**.

Démonstration : Montrons que E n'est pas continue en 1.

– Si $x \in [0;1[$, alors $E(x)=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} E(x)=0$

– Si $x \in [1;2[$, alors $E(x)=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} E(x)=1$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} E(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} E(x)$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} E(x)=0$ n'existe pas, donc la fonction partie entière n'est pas continue en 1.

Proposition: La fonction partie entière **n'est continue en aucune valeur p**, entier relatif.

Démonstration : Montrons que E n'est pas continue en p .

– Si $x \in [p-1;p[$, alors $E(x)=p-1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x<p}} E(x)=p-1$

– Si $x \in [p;p+1[$, alors $E(x)=p$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x>p}} E(x)=p$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x<p}} E(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to p\\ x>p}} E(x)$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to p} E(x)=0$ n'existe pas, donc la fonction partie entière n'est pas continue en p .

1.3. Continuité sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **continue sur I** lorsque f est **continue en toute valeur *a* appartenant à I**.

Exemples

- Les fonctions polynômes sont continues sur ℝ.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle I inclus dans leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.

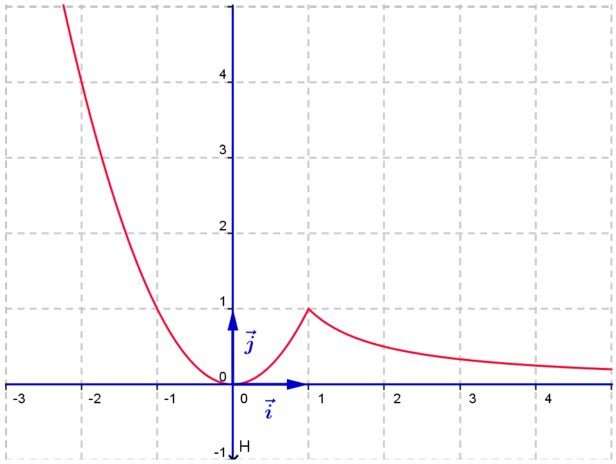
Remarque Interprétation graphique

Une fonction **continue** sur un intervalle I est une fonction dont on trace la courbe représentative **sans lever le crayon**.

Exemple

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x<1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur ℝ.



Démonstration :

– f est continue sur $]-\infty;1[$ en tant que fonction polynôme $(f(x)=x^2)$.

– f est aussi continue sur $[1;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle $\left(f(x)=\dfrac{1}{x}\right)$.

Reste à voir si f est continue en 1.

– $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2=1$,

– $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1}=1$,

– $f(1)=\dfrac{1}{1}=1$,

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$, et f est alors continue en 1.

On en déduit que f est continue sur ℝ.

1.4. Propriétés des fonctions continues

La **somme** et le **produit** de deux fonctions continues sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0)\neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est **continue** sur x_0 .

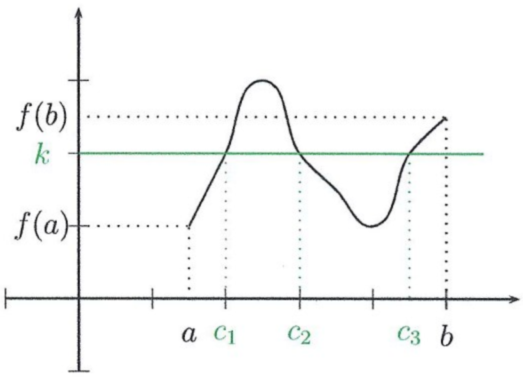
Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $f\circ g$ est **continue** sur x_0 .

2. Le théorème des valeurs intermédiaires

2.1. Théorème

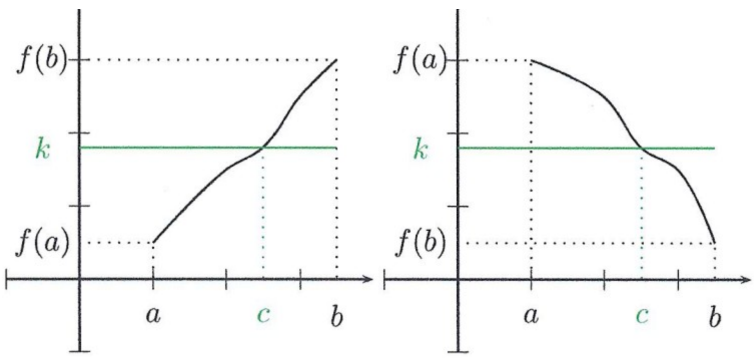
Ce théorème est admis. On le nomme **théorème des valeurs intermédiaires**.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a; b].
Alors, pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ **possède au moins** solution $c \in [a;b]$.



2.2. Corollaire : le théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a; b].
Alors, pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ possède **une unique solution** $c \in [a;b]$.



Démonstration :

On sait déjà, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x)=k$ possède au moins une solution $c \in [a;b]$.
Il reste à montrer que cette solution est unique.
On suppose donc (raisonnement par l'absurde) que l'équation $f(x)=k$ possède une deuxième solution $d \in [a;b]$, avec $c \neq d$.
On a alors $f(c)=f(d)=k$, avec $c \neq d$ ce qui contredit le fait que f est strictement monotone sur $[a;b]$.
On en déduit que d n'existe pas et que la solution c est unique.

<u>Exemple</u>

g est une fonction dont on connaît le tableau de variation.
Par convention, les flèches obliques du tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de g sur les intervalles considérés.

x	-7		-1		3		9
$f(x)$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	10	$\searrow$	5

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x)=2$.

Sur l'intervalle $[-7; -1]$, g est continue et strictement décroissante.

L'image de $[-7; -1]$ par g est $[-1; 5]$, et $2\in[-1; 5]$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=2$ possède une solution unique $\alpha\in[-7; -1]$.

Sur l'intervalle $[-1; 3]$, g est continue et strictement croissante.

L'image de $[-1; 3]$ par g est $[-1; 10]$, et $2\in[-1; 10]$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=2$ possède une solution unique $\beta\in[-1; 3]$.

Sur l'intervalle $[3; 9]$, g est continue et strictement décroissante.

L'image de $[3; 9]$ par g est $[5; 10]$, et $2 \notin [5; 10]$, donc l'équation $g(x)=2$ ne possède pas de solution dans $[3;9]$.

En résumé, l'équation $g(x)=2$ possède deux solutions α et β.