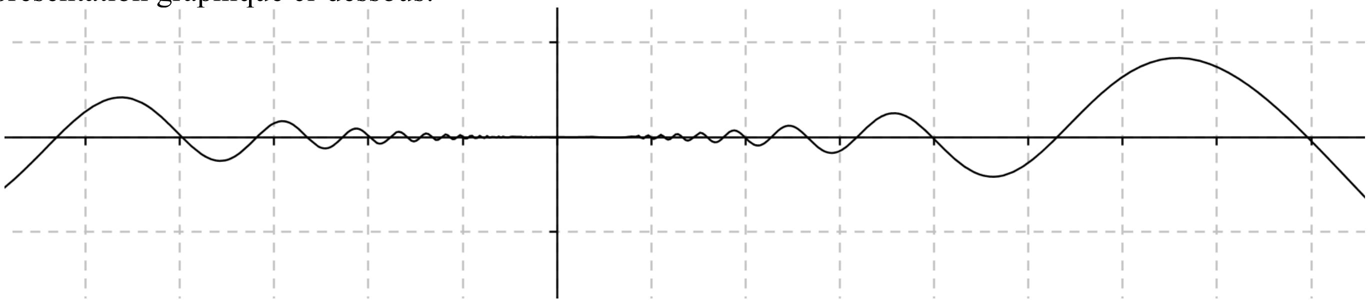
Exercice

Répondre par « oui » ou « non » aux cinq questions suivantes. Les réponses affirmatives seront justifiées par une démonstration, les autres le seront par un contre-exemple.

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est continue en 0, est-elle nécessairement dérivable en 0?
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en 0, est-elle nécessairement continue en 0?
3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0)=0$.
La fonction f admet-elle nécessairement un extremum en 0?
4. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et admettant un maximum en 1 sur $[0;1]$.
La fonction f vérifie-t-elle nécessairement la condition $f'(1)=0$?
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$. On donne l'allure de sa représentation graphique ci-dessous:



a) La fonction f est-elle continue en 0?
b) La fonction f est-elle dérivable en 0?
c) La fonction f' est-elle continue en 0?

Correction :

1. **Non**
Contre-exemple:
La fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est continue en 0:
$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$
La fonction $f(x)=\sqrt{x}$ **n'est pas dérivable en 0**, car:
pour $x>0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

f est **dérivable** sur $\boxed{]0;+\infty[}$. Sur cet intervalle, $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

Un autre contre-exemple:
f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$
Pour x<0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$
Pour x>0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x-0}{x-0}=1$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$
Donc le nombre dérivé à gauche est différent du nombre dérivé à droite donc f **n'est pas dérivable en 0**.

2. **Oui**
Démonstration:
On suppose que la fonction f est dérivable en 0.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$
Posons $\phi(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)$
$\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=f'(0)-f'(0)=0$
Or, $f(x)-f(0)=x(\phi(x)+f'(0))$
$f(x)=f(0)+x(\phi(x)+f'(0))$
$f(x)=f(0)+x\phi(x)+xf'(0)$
Donc, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)+0\times 0+0\times f'(0)=f(0)$
Donc ***f* est continue en 0**.

3. **Non**
Contre-exemple:
On considère la fonction $f(x)=x^3$
f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3x^2$ donc $f'(0)=0$.
Cependant, f **n'admet pas un extremum** en 0, f est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$**.

4. **Non**

Contre-exemple:

On considère la fonction $f(x)=-\sqrt{x(1-x)}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		–	0	+		+	
$(1-x)$		+		+		–	
$x(1-x)$		–		+		–	

f une fonction continue sur [0;1], dérivable sur]0;1[.

Sur]0;1[, $f'(x)=\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

-2x+1=0

$x=\dfrac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

f une fonction continue sur [0;1], dérivable sur]0;1[et admettant un maximum en 1 sur [0;1].

Et f **ne vérifie pas la condition $f'(1)=0$**, puisque **f' n'est pas dérivable en 1**.

Remarque:

On peut choisir f définie sur ℝ par $f(x)=x$, $f'(1)=1$

5.

a) **Oui**

Démonstration:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{\sin X}{X}=0$$ (d'après la fiche d'exercices sur la limite des fonctions)

Donc: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=0$$

$$f(x)=x\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Donc, $\lim_{x\to 0} f(x)=0\times 0=0$

Or $f(0)=0$

Donc **f est continue en 0**.

b) **Oui**

Démonstration:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=h\sin\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{\frac{1}{h}}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{\frac{1}{h}}=0$

Donc, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$

Donc, la **fonction *f* est dérivable en 0** et $\boxed{f'(0)=0}$

c) **Non**

Démonstration:

$$f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\quad \text{si } x\neq 0$$

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$f'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=0$$

Donc: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0

Donc $f'(x)$ **n'admet pas de limite en 0**. Or, $f'(0)=0$ donc **la fonction *f'* n'est pas continue en 0**.